A.O. 8390

THESE DE DOCTORAT D'ETAT ES-SCIENCES MATHEMATIQUES

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE PARIS VI

PAR

RENEE GATIGNOL

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES

CONTRIBUTION A LA THEORIE CINETIQUE DES GAZ

A REPARTITION DISCRETE DE VITESSES

SOUTENUE LE 20 juin 1973 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

MM.	H. CABANNES	PRESIDENT
	J.P. GUIRAUD	EXAMINATEURS
	P.A. RAVIART	EXAMINATEURS
	J.L. DELCROIX	INVITE

A.O. 8390

THESE DE DOCTORAT D'ETAT ES-SCIENCES MATHEMATIQUES

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE PARIS VI

PAR

RENEE GATIGNOL

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES

CONTRIBUTION A LA THEORIE CINETIQUE DES GAZ

A REPARTITION DISCRETE DE VITESSES

SOUTENUE LE 20 juin 1973 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

MM.	H. CABANNES	PRESIDENT
	J.P. GUIRAUD	EXAMINATEURS
	P.A. RAVIART	EXAMINATEURS
	J.L. DELCROIX	INVITE

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Je suis heureuse d'exprimer ici ma reconnaissance à Monsieur le Professeur H. CABANNES qui a dirigé les recherches qui ont conduit à cette thèse. Son aide bienveillante, ses encouragements, sa confiance m'ont permis de mener à bien ce travail. Je veux aussi témoigner ma gratitude à Monsieur le Professeur J.P. GUIRAUD qui a lu le manuscrit.

Je remercie Monsieur le Professeur P.A. RAVIART qui m'a donné le sujet de ma seconde thèse, Monsieur le Professeur J.L. DELCROIX qui a bien voulu faire partie du jury, et Monsieur le Professeur A. LICHNEROWICZ qui a présenté mes notes à l'Académie des Sciences.

Cette étude doit beaucoup à tous les Professeurs qui ont assuré ma formation scientifique et à tous mes collègues et amis de l'Institut de Mécanique Théorique et Appliquée.

Que Madame NICOLAS et Monsieur SEGOUAT trouvent ici mes remerciements pour la qualité de la réalisation matérielle de ce travail.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544710_0004

CONTRIBUTION A LA THEORIE CINETIQUE DES GAZ

A REPARTITION DISCRETE DE VITESSES

INTRODUCTION. 7

Chap. I - MODELE GENERAL DE GAZ A REPARTITION DISCRETE DE VITESSES

A - PRESENTATION DU MODELE GENERAL DE GAZ A REPARTITION DISCRETE DE VITESSES. 14

1 - Les collisions binaires 14

2 - Probabilités de transition 16

3 - Equations 19

4 - Etablissement de quelques identités. 22

B - GRANDEURS MACROSCOPIQUES - EQUATION DE TRANSPORT. 23

1 - Grandeurs macroscopiques 23

2 - Equation de transport. 24

C - INVARIANTS DES RENCONTRES - EQUATIONS DE CONSERVATION. 25

1 - Invariants des rencontres 25

2 - Propriétés des invariants des rencontres 26

3 - Equations de conservation. 27

D - THEOREME H - ETAT MAXWELLIEN. 28

1 - Théorème H 28

2 - Etat Maxwellien 29

3 - Une propriété de l'état maxwellien. 33

E - QUELQUES EXEMPLES DE MODELES DE GAZ A REPARTITION DISCRETE DE VITESSES. 34

1 - Quelques modèles particuliers 34
2 - Modèle plan régulier à 2r vitesses de même module 37
3 - Modèle plan avec des vitesses de modules différents. 42

F - INTRODUCTION DES COLLISIONS TERNAIRES POUR LE MODELE PLAN REGULIER A 2r VITESSES DE MEME MODULE. 45

1 - Les collisions ternaires 45
2 - Equations 47
3 - Théorème H. 50

Chap. II - SUR LES SOLUTIONS DES EQUATIONS CINETIQUES

1ère partie : SOLUTION DES EQUATIONS CINETIQUES POUR DE FAIBLES NOMBRES DE KNUDSEN. 54

A - OPERATEUR DE COLLISION LINEARISE. 54

1 - Obtention de l'opérateur de collision linéarisé 54
2 - Propriétés de l'opérateur de collision linéarisé. 55

B - APPLICATION DE LA METHODE DE CHAPMAN-ENSKOG. 59

1 - Application de la méthode de Chapman-Enskog 59
2 - Exemple. 64

2ème partie : ETAT MAXWELLIEN ASSOCIE A UN ETAT MICROSCOPIQUE. 73

C - UNE PROPRIETE DE L'ETAT MAXWELLIEN ASSOCIE A UN ETAT MICROSCOPIQUE. 73

1 - Une inégalité 73
2 - Théorème préliminaire 75
3 - Une propriété de l'état maxwellien associé à un état microscopique. 75

D - UNE PROPRIETE DE L'ETAT INTERMEDIAIRE ASSOCIE A UN ETAT MICROSCOPIQUE. 80

1 - Définition de l'état intermédiaire associé à un état microscopique 80
2 - Une inégalité 81
3 - Théorème préliminaire 82
4 - Une propriété de l'état intermédiaire associé à un état microscopique . 85

E - UNE EVALUATION DE LA DISTANCE ENTRE UN ETAT MICROSCOPIQUE ET L'ETAT MAXWELLIEN ASSOCIE. 86

3ème partie : SYSTEME D'EQUATIONS CINETIQUES MODIFIEES. 93

F - THEOREME D'EXISTENCE ET D'UNICITE DE LA SOLUTION D'UN SYSTEME D'EQUATIONS CINETIQUES MODIFIEES. 93

1 - Les équations cinétiques modifiées 94

2 - Le problème de Cauchy pour les équations cinétiques modifiées admet une solution unique. 96

G - UNE INEGALITE DEDUITE DU THEOREME H. 100

Chap. III - ETUDE DES ONDES DE CHOC DANS UN MILIEU A REPARTITION DISCRETE DE VITESSES

A - LES VITESSES CARACTERISTIQUES DU SYSTEME DES EQUATIONS D'EULER. 106

1 - Le système des équations d'Euler ; les vitesses caractéristiques de ce système 106

2 - Les vitesses de propagation des ondes de choc infiniment faibles 109

3 - Linéarisation des équations cinétiques exactes au voisinage d'un état maxwellien 112

4 - Deux interprétations des vitesses caractéristiques du système des équations d'Euler. 113

B - PROPRIETE DE L'EQUATION AUX DERIVEES PARTIELLES ASSOCIEE AU SYSTEME DES EQUATIONS CINETIQUES LINEARISEES AU VOISINAGE D'UN ETAT MAXWELLIEN. 116

1 - Linéarisation du système des équations cinétiques et obtention de l'équation aux dérivées partielles associée 116

2 - Introduction du polynôme $Q(\lambda)$ 118

3 - Un lemme 121

4 - Propriété d'emboitement des groupements homogènes d'ordre successif de l'équation aux dérivées partielles $\Delta h = 0$. 127

C - LES ONDES DE CHOC DANS UN MILIEU A REPARTITION DISCRETE DE VITESSES. 134

1 - Le problème du choc 134

2 - Application des conditions de stabilité de Lax dans le cas du milieu sans dissipation 138

3 - Application des conditions nécessaires d'existence d'une structure de choc dans le cas du milieu avec dissipation 141

4 - Compatibilité des deux études précédentes 144

5 - Interprétation physique des résultats. 147

Chap. IV - ETUDE DU MILIEU CORRESPONDANT AU CAS D'UN MODELE PLAN REGULIER A SIX VITESSES

1ère partie : APPLICATION DE LA THEORIE GENERALE. 150

A - MODELE - NOTATIONS. 150

B - INVARIANTS DES RENCONTRES - EQUATIONS DE CONSERVATION. 151

C - L'ETAT MAXWELLIEN. 155

1 - Quelques remarques d'ordre géométrique en liaison avec le fait que les densités N_i sont positives 155

2 - Existence et unicité de l'état maxwellien associé à un état macroscopique. 156

D - METHODE DE CHAPMAN-ENSKOG. 157

1 - La première approximation $N^{(0)}$ 157

2 - Introduction de L 158

3 - Calcul de $b_4^{(1)}$ et $b_5^{(1)}$ en fonction de L 159

4 - Expressions explicites pour $b_4^{(1)}$ et $b_5^{(1)}$ 163

5 - Récapitulation des résultats et obtention de la seconde approximation $N^{(1)}$. 165

2ème partie : PROPAGATION DES ONDES DE CHOC.

E - POSITION DU PROBLEME - LES DIVERS SYSTEMES D'EQUATIONS ENVISAGES. 167

1 - Position du problème 167
2 - Les équations cinétiques exactes 168
3 - Les équations d'Euler 168
4 - Les équations de Navier-Stokes. 169

F - LES RELATIONS DE CHOC. 170

1 - Calcul des densités dans l'état 2 en fonction des densités dans l'état 1 et de la vitesse de déplacement de l'onde de choc 170
2 - Détermination de tous les états 2 qu'il est possible de relier à l'état 1 par les relations de choc. 173

G - LES ONDES DE CHOC DANS LE MILIEU SANS DISSIPATION. 177

H - LES ONDES DE CHOC DANS LE MILIEU AVEC DISSIPATION DECRIT PAR LES EQUATIONS CINETIQUES EXACTES. 178

I - LES ONDES DE CHOC DANS LE MILIEU AVEC DISSIPATION DECRIT PAR LES EQUATIONS DE NAVIER STOKES. 180

1 - Problème de la structure de l'onde de choc 180
2 - Equation différentielle vérifiée par la densité n 180
3 - Etude de l'équation différentielle vérifiée par la densité n . 182

J - INTERPRETATION DES RESULTATS. 189

K - STRUCTURES DE L'ONDE DE CHOC. 192

1 - La structure de l'onde de choc à partir des équations cinétiques exactes 192
2 - Etude comparative des structures obtenues à partir des équations cinétiques exactes et à partir des équations de Navier-Stokes 194
3 - Etude comparative des structures obtenues à partir des équations cinétiques exactes en tenant compte ou non des collisions ternaires. 198
4 - Analyse des résultats. 199

APPENDICE I

Calcul d'un déterminant. 201

APPENDICE II

Sur la résolution d'un système de p équations à p inconnues. 205

APPENDICE III

Sur la résolution du système d'équations

$F(x_1, x_2, \ldots, x_q, \xi) = F(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_q^\circ, \xi)$, $i = 1, 2, \ldots, q$. 215

BIBLIOGRAPHIE 223

INTRODUCTION

En théorie cinétique des gaz, la discrétisation des vitesses qui consiste à considérer que les vitesses des particules appartiennent à un ensemble fini de vecteurs est une idée déjà ancienne. Maxwell [39] conçut un modèle pour un fluide constitué de particules identiques bougeant dans les six directions définies par un système d'axes orthogonaux avec des vitesses constantes en module, et prédit l'équation d'état et les propriétés de transport pour un gaz.

Plus récemment Carleman [6] en 1957 considere un gaz fictif dont les molécules ne peuvent posséder que deux vitesses différentes qui s'interchangent au cours des chocs, ce qui l'amène à écrire un système de deux équations aux dérivées partielles. Ce système possède plusieurs propriétés analogues à celles de l'équation de Boltzmann, et notamment Carleman établit un théorème H.

En 1960 Gross [24] souligne l'intérêt de la discrétisation des vitesses qui permet de remplacer l'équation intégro-différentielle de Boltzmann par un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires et couplées, et rappelle que cette technique a été appliquée avec succès dans le domaine du transfert radiatif.

Des modèles simples de gaz à répartition discrète de vitesses sont alors décrits par Broadwell en 1964, et utilisés pour résoudre des problèmes de dynamique des gaz raréfiés dans lesquels on doit faire appel à l'équation de Boltzmann; pour les écoulements de Couette et de Rayleigh [3] et pour la structure d'une onde de choc à Mach infini [2] ces modeles donnent une image physique simple des phénomènes; les résultats quantitatifs sont remarquablement proches de ceux trouvés par d'autres méthodes.

Nous avons d'abord étudié [13] les ondes de choc susceptibles d'apparaître dans un fluide au repos en utilisant le modèle décrit par Broadwell dans [2]; comme en dynamique des gaz, les chocs s'accompagnent d'une compression et d'une augmentation de masse spécifique, et la vitesse de propagation du choc dans le fluide au repos est supersonique. Pour un choc fort l'épaisseur de l'onde de choc est de l'ordre de quelques libres parcours moyens. Nous n'avons pas repris

cette étude ici mais des résultats comparables sont obtenus dans le chapitre IV en utilisant un autre modèle.

Nous avons introduit ensuite [14], (1966), un modele plan régulier à 2r vitesses de même module et établit le théorème H pour ce modèle. Dans le cas r = 4, comme dans [13], nous avons étudié les ondes de choc susceptibles d'apparaître dans un fluide au repos et mis en évidence des ondes de choc de détente. De telles ondes sont également obtenues dans le chapitre IV en utilisant le modèle plan régulier avec r = 3.

En 1966 Harris [28] envisage un gaz modérément dense à répartition discrete de vitesses décrit par le modèle plan régulier à six vitesses. Un théoreme H est démontré en tenant compte des collisions ternaires ce qui laisse espérer un théorème H analogue en théorie cinétique classique lorsqu'on tient compte des collisions ternaires. En fait Harris établit un théorème H séparément pour les termes de collisions binaires et pour les termes de collisions ternaires, mais dans la généralisation que nous avons faite [15], il apparaît clairement que pour obtenir le théorème H dans le cas des collisions ternaires il est nécessaire de considérer les collisions binaires. Toujours à propos de la fonction H de Boltzmann, en utilisant un modèle plan régulier à 4 vitesses, Harris [29] prouve que les dérivées successives de H par rapport au temps ont des signes alternés.

Signalons enfin un travail récent (1971) de Godunov et Sultangazin [21]. Ces auteurs considèrent le modèle décrit par Broadwell dans [2]; ils étudient le lien entre les équations cinétiques et les équations appropriées du milieu continu et soulignent l'analogie entre les équations cinétiques du modele et l'équation de Boltzmann classique, comme nous l'avons fait par une approche légèrement différente dans [16] et [17], (1969, 1970). De plus ils étudient un système d'équations cinétiques modifiées et obtiennent pour la solution de ce système un théorème d'existence; cette solution vérifie en un certain sens généralisé les équations d'Euler appropriées. Nous avons, dans les parties 2 et 3 du chapitre II, fait une étude semblable pour un modèle général de gaz à répartition discrète de vitesses.

D'un point de vue Mécanique Statistique, Hardy et Pomeau [27] pour un modèle plan régulier à quatre vitesses obtiennent pour le fluide correspondant,

en partant de l'équation de Liouville, les équations hydrodynamiques d'Euler et de Navier-Stokes. Leurs résultats sont comparables aux nôtres [16].

En théorie cinétique des gaz, la méthode de discrétisation des vitesses qui est également mentionnée dans le livre de Kogan [36] et aussi par Guiraud [25] et par Smolderen [42], n'a donc donné lieu à aucun développement systématique. Le but essentiel de ce travail est de présenter une étude générale conduisant à ce qu'on peut appeler "la théorie cinétique des gaz à répartition discrète de vitesses" ou "théorie cinétique élémentaire".

Dans le chapitre I on présente le modèle général d'un gaz à répartition discrète de vitesses : le gaz est constitué de particules identiques et on suppose que chaque particule a pour vecteur vitesse l'un des vecteurs pris dans un ensemble donné de p vecteurs. En général seules les collisions binaires sont prises en compte. L'équation de Boltzmann classique est remplacée ici par un système de p équations aux dérivées partielles non-linéaires possédant un certain nombre de propriétés intéressantes dont plusieurs sont analogues à celles de l'équation de Boltzmann.

On donne une définition appropriée des invariants des rencontres, ce qui permet d'introduire q $(q < p)$ variables d'état macroscopique indépendantes analogues aux densité, température et vitesse d'un gaz habituel, mais pouvant être plus nombreuses. On peut alors, comme en théorie cinétique classique, écrire des équations de conservation qui ne constituent pas un système fermé pour les variables d'état macroscopique. La fonction H de Boltzmann convenablement définie conduit à un théorème H et on peut introduire la notion d'état maxwellien. On démontre qu'étant donné un gaz dans un état microscopique, il existe un gaz dans un état maxwellien et un seul ayant les mêmes variables d'état macroscopique que lui. Cette propriété est également vraie en théorie cinétique classique.

Quelques modèles de gaz à répartition discrète de vitesses sont décrits, en particulier le modèle plan régulier à $2r$ vitesses de même module (I-§ E-2). Avec ce modèle nous avons explicité le système d'équations cinétiques décrivant l'évolution d'un milieu modérément dense où l'on tient compte des collisions ternaires et nous avons démontré un théorème H.

Le chapitre II comprend trois parties. Dans la première on s'intéresse à l'opérateur de collision linéarisé au voisinage d'un état maxwellien. Cet opérateur possède des propriétés permettant d'appliquer la méthode de Chapman-Enskog pour la résolution des équations cinétiques pour de faibles nombres de Knudsen. On obtient alors des lois de comportement pour ce milieu qui assurent la fermeture du système des équations de conservation. Il est facile d'expliciter les équations d'Euler dans le cas général. Les équations de Navier-Stokes sont données pour les cas particuliers suivants : le modèle plan régulier à quatre vitesses, et, dans le chapitre IV, le modèle plan régulier à six vitesses.

Dans les seconde et troisième parties nous généralisons au cas du modèle général certains résultats de Godunov et Sultangazin [21]. En particulier on donne une minoration et une majoration pour les densités $N_i^{(0)}$ de l'état maxwellien associé à un état microscopique dont les densités vérifient $0 < \mu < N_i < M$ pour tout i. Plus généralement nous introduisons une notion d'état intermédiaire associé à un nombre réel τ ($\tau \in [0, 1]$) et à un état microscopique donné. Pour les densités $N_i^{(\tau)}$ de cet état intermédiaire il est trouvé une minoration et une majoration indépendantes de τ. Ceci sert pour estimer $|N_i - N_i^{(0)}|$.

Enfin le problème de Cauchy pour le système d'équations cinétiques modifiées introduit dans la troisième partie admet une solution.

Dans le chapitre III on s'intéresse d'abord au système des équations d'Euler pour les variables d'état macroscopique. Ce système se met sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_k}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial c_k}\right) = 0 \qquad k = 1, \ldots, q.$$

et on montre qu'il est de type hyperbolique.

Par ailleurs la linéarisation du système des équations exactes au voisinage d'un état maxwellien permet d'obtenir pour chaque quantité perturbée une équation aux dérivées partielles linéaire, s'écrivant comme une somme d'opérateurs homogènes d'ordre croissant de q à p. On démontre que les vitesses caractéristiques de l'opérateur d'ordre α sont réelles et sont séparées par les vitesses caractéristiques de l'opérateur d'ordre $\alpha - 1$. Cette propriété est liée à la stabilité des solutions (Whitham [43]). On démontre aussi que l'opérateur d'ordre q a les mêmes vitesses caractéristiques que le système des

équations d'Euler. Ainsi la nature hyperbolique du système des équations d'Euler est à nouveau prouvée.

La propagation des ondes de choc faibles est ensuite étudiée : 1) dans le milieu régi par les équations (non dissipatives) en appliquant les conditions de stabilité de Lax [38]; 2) dans le milieu réel dissipatif régi par les équations exactes et en faisant l'étude de l'existence d'une structure de choc. La compatibilité des résultats de ces deux études est liée à la propriété de séparation des vitesses caractéristiques pour les opérateurs d'ordre q et $q + 1$.

Dans le chapitre IV on explicite les résultats établis dans les chapitres précédents pour le cas d'un modèle plan régulier à 6 vitesses. On peut alors calculer l'approximation d'ordre 1 de Chapman-Enskog et écrire explicitement pour le milieu considéré les équations de Navier-Stokes. Les problèmes d'ondes de choc peuvent être complétement résolus, même lorsqu'on ne se limite plus aux chocs faibles; les densités dans l'état aval sont données en fonction des densités dans l'état amont et de la vitesse du choc.

L'étude de la configuration du choc est faite par trois approches différentes : 1) à partir des équations d'Euler du milieu et par application des conditions de stabilité de Lax ; 2) à partir des équations exactes; 3) à partir des équations approchées de Navier-Stokes. Dans les deux derniers cas on étudie l'existence d'une structure pour l'onde de choc. Les résultats obtenus par ces diverses méthodes sont compatibles.

L'étude comparative des structures obtenues d'une part à partir des équations exactes et d'autre part à partir des équations de Navier-Stokes montre que les deux profils correspondants pour la densité macroscopique sont distincts. L'épaisseur de l'onde de choc obtenue à partir des équations cinétiques est supérieure à l'épaisseur de l'onde de choc obtenue à partir des équations de Navier-Stokes. Ces résultats sont d'un point de vue qualitatif conformes aux résultats trouvés par d'autres auteurs [1], [8], [32], [40] à partir de divers traitements de l'équation de Boltzmann.

Ainsi la discrétisation des vitesses a permis, sur des modèles très simples, et à partir d'équations exactes, de reprendre des études qui n'avaient pu être, jusqu'alors, menées que par voies numériques ou approchées. De plus le système des équations cinétiques du milieu auquel elle conduit dans le cas général possède une structure dont l'intérêt au point de vue mathématique est certain.

Signalons enfin l'avantage qu'il peut y avoir à utiliser de tels modèles pour les calculs sur ordinateur; mais toute une étude reste à faire sur la manière dont les systèmes d'équations cinétiques proposés peuvent approcher l'équation de Boltzmann.

CHAPITRE I

MODELE GENERAL DE GAZ A REPARTITION DISCRETE DE VITESSES

Dans ce chapitre on présente un modèle général de gaz à répartition discrète de vitesses : le milieu est constitué de particules identiques dont les vitesses possibles appartiennent à un ensemble donné de p vecteurs.

Lorsque le milieu est suffisamment raréfié seules les collisions binaires sont prises en considération. Un système de p équations aux dérivées partielles non linéaires et couplées joue le rôle de l'équation de Boltzmann de la théorie cinétique classique. On établit pour ce système certaines propriétés essentielles de l'équation de Boltzmann.

Pour un milieu modérément dense, l'évolution du gaz est décrite par le système d'équations précédent moyennant l'adjonction de nouveaux termes traduisant l'introduction des collisions ternaires. Ce système est explicité dans un cas particulier.

A - PRESENTATION DU MODELE GENERAL DE GAZ A REPARTITION DISCRETE DE VITESSES

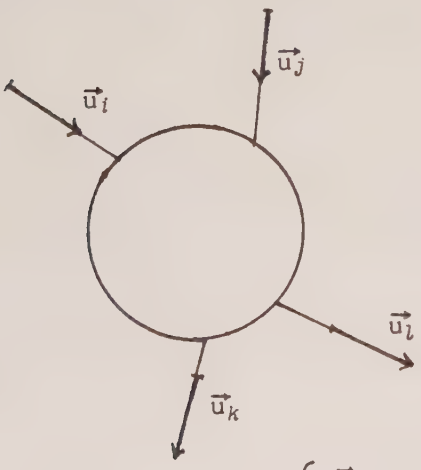
On se place dans un repère galiléen rapporté au repère orthonormé $Oxyz$. Le vecteur position est noté $\vec{r}$, le temps t.

Le milieu est constitué de particules identiques de masse m ; ces particules ne peuvent avoir pour vecteur vitesse que l'un des vecteurs pris dans un ensemble donné de p vecteurs :

$$\vec{u_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, p .$$

1 - Les collisions binaires

On dira que deux particules interagissent entre elles lorsque la distance les séparant est inférieure à une certaine quantité σ, quantité représentant le rayon d'action du potentiel d'interaction moléculaire. Ce qui se passe au cours de la collision n'est pas décrit en détail ; on s'intéresse seulement aux vitesses qu'ont les particules avant et après la collision.



Soient $\vec{u_i}$ et $\vec{u_j}$ les vitesses des deux particules avant la collision; on suppose qu'après la collision ces particules ont pour vitesses $\vec{u_k}$ et $\vec{u_l}$. Ces quatre vecteurs ne sont pas arbitraires; en exprimant la conservation respectivement de la masse (toujours vérifiée), de la quantité de mouvement et de l'énergie on a :

$$(1) \qquad \begin{cases} \vec{u_i} + \vec{u_j} = \vec{u_k} + \vec{u_l} \\ |\vec{u_i}|^2 + |\vec{u_j}|^2 = |\vec{u_k}|^2 + |\vec{u_l}|^2 \end{cases}$$

Une telle collision sera notée : $\vec{u_i}, \vec{u_j} \longrightarrow \vec{u_k}, \vec{u_l}$.

Etant donnés $\vec{u_i}$ et $\vec{u_j}$ on doit chercher les vecteurs $\vec{u_k}$ et $\vec{u_l}$ satisfaisant à (1) et appartenant à l'ensemble des p vecteurs donnés. Ce problème peut avoir 0, 1 ou plusieurs solutions ; sa résolution doit être faite dans chaque cas particulier et n'est pas toujours aisée. Dans le paragraphe E on donne des exemples où les collisions binaires sont complètement explicitées. En théorie cinétique classique ce même problème admet une infinité de solutions dépendant de deux paramètres, par exemple le paramètre d'impact et un angle fixant le plan des trajectoires souvent noté ε, [7], [9], [23], [34].

Afin de préciser les collisions susceptibles de se réaliser on introduit deux relations d'équivalence, l'une sur l'ensemble des couples de vitesses, l'autre sur l'ensemble des vitesses.

Partition sur l'ensemble des couples (non ordonnés) $(\vec{u_i}, \vec{u_j})$

On allège les notations en écrivant (i, j) au lieu de $(\vec{u_i}, \vec{u_j})$, et (i, j) désignera toujours le couple non ordonné des indices i et j. Sur l'ensemble des $\frac{1}{2}p(p+1)$ couples (i, j) on a la relation d'équivalence suivante :

(2) $(i, j) \equiv (k, l) \iff \vec{u_i}, \vec{u_j}$ et $\vec{u_k}, \vec{u_l}$ vérifient les relations (1).

On peut dire aussi :

$(i, j) \equiv (k, l) \iff$ { La sphère ayant pour diamètre le vecteur $\vec{u_i} - \vec{u_j}$ est identique à la sphère ayant pour diamètre le vecteur $\vec{u_k} - \vec{u_l}$ (en donnant une même origine à tous les vecteur $\vec{u_i}$).

Cette propriété géométrique est classique [23].

On obtient une partition de l'ensemble des couples (i,j) en p' classes d'équivalence $C_1, C_2, \ldots, C_\alpha, \ldots, C_{p'}$. On note aussi par $\overline{(i,j)}$ la classe de (i,j).

Remarquons que la classe $\overline{(i,i)}$ ne contient qu'un seul élément (i,i).

Partition sur l'ensemble des vitesses $\vec{u_i}$

Une collision $\vec{u_i}, \vec{u_j} \longrightarrow \vec{u_k}, \vec{u_l}$ est dite triviale si le couple (k,l) est identique au couple (i,j). Dans le cas contraire la collision est dite non triviale.

On considère la relation suivante sur les vitesses :

(3) $\vec{u_i} \sim \vec{u_j}$ si on a soit a) soit b) :

a) les indices i et j sont égaux.

b) les indices i et j sont distincts et il existe une suite d'indices $k_1, k_2, \ldots, k_l$ telle que la suite des collisions indiquées ci-après ne soit composée que de collisions non triviales :

$$\vec{u_i}, \vec{u_{k_1}} \longrightarrow \vec{u_{k_2}}, \vec{u_{k_3}} \quad ; \quad \vec{u_{k_3}}, \vec{u_{k_4}} \longrightarrow \vec{u_{k_5}}, \vec{u_{k_6}} \quad ; \quad \ldots \quad ;$$

$$\vec{u_{k_{l-5}}}, \vec{u_{k_{l-4}}} \longrightarrow \vec{u_{k_{l-3}}}, \vec{u_{k_{l-2}}} \quad ; \quad \vec{u_{k_{l-2}}}, \vec{u_{k_{l-1}}} \longrightarrow \vec{u_{k_l}}, \vec{u_j} \ .$$

Cette relation est une relation d'équivalence. Ceci se démontre sans difficulté : pour établir la transitivité de la relation dans le cas où $\vec{u_i} \sim \vec{u_j}$ et $\vec{u_j} \sim \vec{u_k}$ avec i, j, k tous distincts la suite à considérer pour obtenir la propriété b) est obtenue en insérant j entre les deux suites existantes traduisant $\vec{u_i} \sim \vec{u_j}$ et $\vec{u_j} \sim \vec{u_k}$.

On note $\bar{i}$ la classe de $\vec{u_i}$. On obtient ainsi une partition de l'ensemble des vitesses.

Remarques

Si $\vec{u_i} \sim \vec{u_j}$ avec i et j distincts, tout élément de la suite $\vec{u_{k_1}}, \vec{u_{k_2}}, \ldots, \vec{u_{k_l}}$ est dans $\bar{i}$.

Si les vitesses $\vec{u_i}, \vec{u_j}$ donnent lieu à une collision non triviale alors $\vec{u_j}$ est dans $\bar{i}$.

On peut avoir $\bar{i}$ réduit au seul élément $\vec{u_i}$, autrement dit toutes les collisions de particules ayant pour vitesses $\vec{u_i}, \vec{u_j}$ sont triviales.

2 - Probabilités de transition

$N_i = N_i(\vec{r},t)$ désigne la densité numérique de particules de vitesses $\vec{u_i}$ à l'instant t et au point $\vec{r}$.

Définition

On admet que le temps de collision est très petit par rapport au temps moyen de vol, lui-même très petit par rapport au temps macroscopique, et que le rayon d'action σ du potentiel intermoléculaire est très petit par rapport au libre

parcours moyen, lui même très petit par rapport à une longueur macroscopique de référence. Ceci permet d'affirmer comme en [2], [3], [28] que pendant l'intervalle de temps dt contenant l'instant t et dans le volume $d\vec{r}$ entourant le point $\vec{r}$ le nombre de collisions entre les particules de vitesses $\vec{u_i}$, $\vec{u_j}$ avant la collision donnant après collision des particules de vitesses $\vec{u_k}$, $\vec{u_l}$ est proportionnel à $N_i\ N_j$; il est égal à :

$$A_{ij}^{kl}\ N_i\ N_j\ dt\ d\vec{r}\ .$$

Ou bien pendant l'unité de temps le nombre de collisions des particules de vitesse $\vec{u_j}$ avec une particule de vitesse $\vec{u_i}$ fixée qui donnent un couple de particules de vitesses $\vec{u_k}$, $\vec{u_l}$ est

$$A_{ij}^{kl}\ N_j$$

A_{ij}^{kl} est une constante appelée <u>probabilité de transition</u> de la collision $\vec{u_i}$, $\vec{u_j} \longrightarrow \vec{u_k}$, $\vec{u_l}$. Autrement dit la dynamique de cette collision s'exprime au moyen de A_{ij}^{kl} .

Cette terminologie est empruntée à la mécanique quantique [31] , [33].

$\sum_{(k,l)\in C_\alpha} A_{ij}^{kl}\ N_j$ représente la fréquence de collision d'une particule de vitesse $\vec{u_i}$ avec les particules de vitesse $\vec{u_j}$, C_α étant la classe $(\overline{i,j})$.

$\sum_{j=1}^{p} \sum_{(k,l)\in C_\alpha} A_{ij}^{kl}\ N_j$ représente la fréquence de collision d'une particule de vitesse $\vec{u_i}$.

<u>Cas particulier</u>

Si les particules sont assimilables à des points à rayon d'action fini, ou si ce sont des sphères élastiques, les particules de vitesse $\vec{u_j}$ susceptibles de rencontrer une particule de vitesse $\vec{u_i}$ fixée pendant l'unité de temps sont dans un cylindre droit de section S et de hauteur $|\vec{u_i} - \vec{u_j}|$. Le nombre de telles collisions est :

$$S\ |\vec{u_i} - \vec{u_j}|\ N_j$$

On suppose que le couple de particules de vitesses $\vec{u_i}$, $\vec{u_j}$ donne le couple de particules de vitesses $\vec{u_k}$, $\vec{u_l}$ avec la probabilité α_{ij}^{kl} si bien que dans cet exemple

$$(4) \qquad A_{ij}^{kl} = S\ |\vec{u_i} - \vec{u_j}|\ \alpha_{ij}^{kl} \quad \text{avec} \quad \sum_{(k,l)\in(\overline{i,j})} \alpha_{ij}^{kl} = 1$$

Propriétés des probabilités de transition A_{ij}^{kl} .

Les probabilités de transition A_{ij}^{kl} sont des constantes positives ou nulles. Les indices inférieurs correspondent aux vitesses des particules avant la collision, les indices supérieurs aux vitesses après la collision.

Elles sont symétriques par rapport aux deux indices inférieurs et aussi par rapport aux deux indices supérieurs :

$$A_{ij}^{kl} = A_{ji}^{kl} = A_{ij}^{lk} \quad . \tag{5}$$

On convient d'affecter une probabilité de transition nulle à une collision irréalisable c'est à dire

$$(i,j) \not\equiv (k,l) \Longrightarrow A_{ij}^{kl} = A_{kl}^{ij} = 0 \quad . \tag{6}$$

En particulier on a sans difficulté à partir de (1) et (2) :

$$\begin{cases} A_{im}^{in} = 0 & \text{si} \quad n \neq m \\ A_{kl}^{ii} = A_{ii}^{kl} = 0 & \text{si} \quad k \neq i \quad \text{ou} \quad l \neq i \quad . \end{cases} \tag{7}$$

Hypothèses sur les probabilités de transition A_{ij}^{kl}

On envisage deux hypothèses possibles

HYPOTHESE I . Microréversibilité

$$A_{ij}^{kl} = A_{kl}^{ij} \tag{8}$$

En Mécanique statistique cette propriété correspond au "principe de microréversibilité" ou "principe du bilan détaillé" ou encore "principe d'Onsager" [33].

Pour le cas particulier envisagé ci-dessus cette hypothèse donne

$$S\,|\vec{u_i} - u_j|\,\alpha_{ij}^{kl} = S\,|\vec{u_k} - \vec{u_l}|\;\alpha_{kl}^{ij}$$

et comme le cas intéressant est celui où $(i,j) \equiv (k,l)$ on a $|\vec{u_i} - \vec{u_j}| = |\vec{u_k} - \vec{u_l}|$ et par suite $\alpha_{ij}^{kl} = \alpha_{kl}^{ij}$. Cette égalité correspond à l'hypothèse de la collision inverse que l'on avait formulée dans [15] et que l'on retrouvera dans la partie E . On rappelle cette hypothèse :

Si un couple de particules de vitesses $\vec{u_i}$, $\vec{u_j}$ prend après collision les vitesses $\vec{u_k}$, $\vec{u_l}$ avec la probabilité φ alors au cours de la collision inverse les vitesses $\vec{u_i}$, $\vec{u_j}$ sont prises avec la même probabilité.

HYPOTHESE II. Bilan semi-détaillé

$$\sum_{(k,l)} A_{ij}^{kl} = \sum_{(k,l)} A_{kl}^{ij} \quad . \tag{9}$$

La sommation est étendue à tous les couples (k,l), mais compte tenu de (6) elle peut être réduite à l'ensemble des couples (k,l) appartenant à $(\overline{i,j})$.

En Mécanique Statistique cette propriété correspond au "principe du bilan semi-détaillé" ou "conditions de Stueckelberg" [31].

Pour le cas particulier (9) s'écrit

$$\sum_{(k,l)\,\in\,(\overline{i,j})} \alpha_{ij}^{kl} = \sum_{(k,l)\,\in\,(\overline{i,j})} \alpha_{kl}^{ij}$$

Comme le premier membre vaut 1 d'après (4) l'hypothèse signifie que le second membre vaut 1.

Ces deux hypothèses ne sont pas indépendantes. L'hypothèse I est plus forte; en fait : Hypothèse I $\Longrightarrow$ Hypothèse II. Nous les distinguons cependant car dans le cas de l'hypothèse I les démonstrations sont grandement simplifiées et parfois triviales.

3 - Equations

Pour écrire les équations décrivant l'évolution du gaz en l'absence de forces extérieures on procède comme Broadwell [2] [3] et comme Harris [28]; on fait ici l'hypothèse (hypothèse du chaos moléculaire) qu'il n'existe aucune corrélation entre les deux particules prenant part à une collision avant leur entrée dans leur domaine d'interaction effective.

On obtient une équation pour chaque N_i en écrivant un bilan pour les particules de vitesse $\vec{u_i}$:

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} + \vec{u_i} \cdot \vec{\nabla} N_i = G_i - L_i$$

∇ note le gradient par rapport aux variables d'espace. L_i et G_i représentent

respectivement la perte et le gain en molécules de vitesse $\vec{u_i}$ pendant l'unité de temps et dans une unité de volume à l'instant et au point considérés. En se reportant à la définition des probabilités de transition on a :

$$L_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p} \sum_{\substack{(k,l)\in(\overline{i,j}) \\ (k,l)\neq(i,j)}} A_{ij}^{kl}\, N_i\, N_j \quad ; \quad G_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p} \sum_{\substack{(k,l)\in(\overline{i,j}) \\ (k,l)\neq(i,j)}} A_{kl}^{ij}\, N_k\, N_l$$

En effet pour qu'il y ait perte d'une molécule de vitesse $\vec{u_i}$ il faut que cette molécule rencontre une autre molécule de vitesse $\vec{u_j}$. Si $j = i$ il ne peut y avoir perte car $(\overline{i,i})$ a un seul élément (i,i). Si $j \neq i$ il y a perte toutes les fois que la collision $\vec{u_i}, \vec{u_j} \longrightarrow \vec{u_k}, \vec{u_l}$ est non triviale. Ceci justifie l'expression de L_i . Pour G_i on raisonne de même.

$$G_i - L_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p} \sum_{\substack{(k,l)\in(\overline{i,j}) \\ (k,l)\neq(i,j)}} (A_{kl}^{ij}\, N_k\, N_l - A_{ij}^{kl}\, N_i\, N_j)$$

On étend la seconde sommation à $(k,l) \in (\overline{i,j})$ car pour $(k,l) = (i,j)$ la parenthèse est nulle ; on l'étend ensuite à tous les couples (k,l) en utilisant les relations (6). Enfin on étend la première sommation à tous les j en utilisant les relations (7).

Les équations décrivant l'évolution du gaz sont :

$$(10) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial N_i}{\partial t} + \vec{u_i} \cdot \vec{\nabla} N_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \sum_{(k,l)} (A_{kl}^{ij}\, N_k\, N_l - A_{ij}^{kl}\, N_i\, N_j) \\ \\ i = 1, 2, \ldots, p. \end{cases}$$

On transforme la sommation sur les couples (k,l) en deux sommations simples sur k et sur l : pour cela on remarque que les termes avec $l = k$ dans les seconds membres de (10) sont nuls d'après les remarques (7). D'où

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial N_i}{\partial t} + \vec{u_i} \cdot \vec{\nabla} N_i = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{j,k,l} (A_{kl}^{ij}\, N_k\, N_l - A_{ij}^{kl}\, N_i\, N_j) \\ \\ i = 1, 2, \ldots, p . \end{cases}$$

Notation : $\sum_j$, $\sum_{j,k}$, ... signifient $\sum_{j=1}^{p}$, $\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p}$, ...

Ecriture condensée du système (11).

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^p$, où p est le nombre de vitesses considérées, dont les éléments dans la base canonique sont $X = (X_1, X_2, \ldots, X_p)$ et muni du produit scalaire habituel noté avec une parenthèse :

$$(X , Y) = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \ldots + X_p Y_p .$$

On introduit un opérateur bilinéaire symétrique de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$ ainsi défini :

$$\begin{cases} \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p \\ U , V \longrightarrow \mathcal{F}(U , V) \end{cases}$$

$\mathcal{F}(U , V)$ ayant pour $i^{\text{ème}}$ composante :

$$(12) \qquad \mathcal{F}_i (U , V) = \frac{1}{4} \sum_{j,k,l} \left\{ A^{ij}_{kl} (U_k V_l + U_l V_k) - A^{kl}_{ij} (U_i V_j + U_j V_i) \right\} .$$

On appelle N la suite des densités $N_1 , N_2 , \ldots , N_p$. En prenant $U = V = N$ (12) se réduit au second membre de la $i^{\text{ème}}$ équation du système (11). On peut donc écrire le système (11) sous la forme condensée

$$(13) \qquad \frac{\partial}{\partial t} N + \mathcal{A} N = \mathcal{F}(N,N)$$

$\mathcal{A}$ est une matrice diagonale d'ordre p dont l'élément non nul de la $i^{\text{ème}}$ ligne est l'opérateur $\vec{u_i} . \vec{\nabla}$.

L'équation (13) joue le rôle de l'équation de Boltzmann en théorie cinétique classique. L'évolution d'un gaz à répartition discrète de vitesses est décrite par un système d'équations aux dérivées partielles non-linéaires et couplées. Le système est en fait semi-linéaire.

Remarques

On se rappelle ici la relation d'équivalence définie en (3) sur l'ensemble des vitesses $\vec{u_i}$.

Si $\bar{i} = \{\vec{u_i}\}$ alors il n'existe pas de collision non triviale entre des particules ayant pour vitesses $\vec{u_i}$ et $\vec{u_j}$ pour tout j. Autrement dit $A^{kl}_{ij} = 0$ pour tout $(k,l) \neq (i,j)$. Le second membre de la $i^{\text{ème}}$ équation dans (11) est nul, et N_i ne figure réellement dans aucune autre équation du système (11). Il y a découplage entre l'équation pour N_i et les p - 1 autres équations.

Supposons que sur l'ensemble des vitesses on ait la partition en p'' classes $\bar{i}_1 , \bar{i}_2 , \ldots , \bar{i}_{p''}$, la classe $\bar{i}_\alpha$ contenant l_α éléments $\vec{u}_{\alpha_1} , \vec{u}_{\alpha_2} , \ldots , \vec{u}_{\alpha_{l_\alpha}}$ alors le système des p équations (11) se découple en p'' systèmes correspon-

dant aux p'' classes. Le système associé à la classe $\bar{i}_\alpha$ est fait des l_α équations pour $N_{\alpha_1}, \ldots, N_{\alpha_{l_\alpha}}$ et ne renferme que ces l_α densités. En effet si N_j avec $\vec{u}_j \notin \bar{i}_\alpha$ figurait dans l'équation pour N_{α_k} par exemple, cela signifierait qu'il existe une collision non triviale, c'est à dire qu'il existe deux vitesses $\vec{u}_k$, $\vec{u}_l$, telle que $\vec{u}_{\alpha_k}$, $\vec{u}_j \longrightarrow \vec{u}_k$, $\vec{u}_l$. Donc $\vec{u}_j$ est dans la classe $\bar{\alpha}_k$ c'est à dire $\bar{i}_\alpha$ d'après les remarques faites dans le paragraphe A - 1. Ceci est impossible et le résultat est établi.

S'il n'y a qu'une seule classe $\bar{i}$, il y a couplage entre toutes les équations.

Il peut y avoir découplage supplémentaire si certains coefficients A_{ij}^{kl} associés à des collisions non triviales sont nuls.

4 - Etablissement de quelques identités

Les identités que l'on va établir sont inspirées d'identités analogues classiques en théorie cinétique [9]. Il s'agit d'exprimer le produit scalaire :

$$(\Phi \ , \ \mathcal{J}(U \ , \ V)) \quad \text{où} \quad \Phi = (\varphi_1 \ , \ \varphi_2 \ , \ \ldots \ , \ \varphi_p) \cdot$$

Les calculs ci-dessous ne nécessitent aucune hypothèse sur les probabilités de transition

$$(14a) \quad (\Phi \ , \ \mathcal{J}(U,V)) = \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l} \varphi_i \left\{ A_{kl}^{ij}(U_k V_l + U_l V_k) - A_{ij}^{kl}(U_i V_j + U_j V_i) \right\}$$

$$(14b) \quad (\Phi \ , \ \mathcal{J}(U,V)) = \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l} \varphi_j \left\{ A_{kl}^{ij}(U_k V_l + U_l V_k) - A_{ij}^{kl}(U_i V_j + U_j V_i) \right\}$$

$$(14c) \quad (\Phi \ , \ \mathcal{J}(U,V)) = -\frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l} \varphi_k \left\{ A_{kl}^{ij}(U_k V_l + U_l V_k) - A_{ij}^{kl}(U_i V_j + U_j V_i) \right\}$$

$$(14d) \quad (\Phi \ , \ \mathcal{J}(U,V)) = -\frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l} \varphi_l \left\{ A_{kl}^{ij}(U_k V_l + U_l V_k) - A_{ij}^{kl}(U_i V_j + U_j V_i) \right\}$$

(14a) est la définition du produit scalaire; (14b) s'obtient à partir de (14a) en échangeant i et j c'est à dire les deux vitesses des particules avant la collision. (14c) se déduit de (14a) en échangeant les couples (i,j) et (k,l) c'est à dire les vitesses des particules avant la collision et les vitesses après la collision. (14d) s'obtient à partir de (14c) en échangeant k et l .

Il en résulte de manière évidente :

$$(15a)\qquad (\Phi, \mathcal{F}(U,V)) = \frac{1}{8}\sum_{i,j,k,l}(\varphi_i+\varphi_j)\left\{A^{ij}_{kl}(U_kV_l + U_lV_k) - A^{kl}_{ij}(U_iV_j + U_jV_i)\right\}$$

$$(15b)\qquad (\Phi, \mathcal{F}(U,V)) = \frac{1}{8}\sum_{i,j,k,l}(\varphi_i-\varphi_k)\left\{A^{ij}_{kl}(U_kV_l + U_lV_k) - A^{kl}_{ij}(U_iV_j + U_jV_i)\right\}$$

$$(15c)\qquad (\Phi, \mathcal{F}(U,V)) = \frac{1}{16}\sum_{i,j,k,l}(\varphi_i+\varphi_j-\varphi_k-\varphi_l)\left\{A^{ij}_{kl}(U_kV_l + U_lV_k) - A^{kl}_{ij}(U_iV_j + U_jV_i)\right\}.$$

Par ailleurs on déduit de (15 c)

$$(16)\qquad (\Phi, \mathcal{F}(U,V)) = \frac{1}{8}\sum_{i,j,k,l}(\varphi_i+\varphi_j-\varphi_k-\varphi_l)\,A^{ij}_{kl}(U_kV_l + U_lV_k)$$

car en échangeant les couples (i,j) et (k,l) on a :

$$\sum_{i,j,k,l}(\varphi_i+\varphi_j-\varphi_k-\varphi_l)\,A^{ij}_{kl}(U_kV_l+U_lV_k) = \sum_{i,j,k,l}(\varphi_k+\varphi_l-\varphi_i-\varphi_j)\,A^{kl}_{ij}(U_iV_j+U_jV_i).$$

En raisonnant de même avec (15 b) on a :

$$(17)\qquad (\Phi, \mathcal{F}(U,V)) = \frac{1}{4}\sum_{i,j,k,l}(\varphi_i-\varphi_k)\,A^{ij}_{kl}(U_kV_l+U_lV_k)$$

B - GRANDEURS MACROSCOPIQUES - EQUATION DE TRANSPORT

1 - Grandeurs macroscopiques

La description microscopique du gaz est donnée par la connaissance de tous les N_i, cependant que son comportement macroscopique dépend seulement de quantités appelées valeurs moyennes. Comme en théorie cinétique classique pour une grandeur $\varphi(\vec{u})$ dépendant de la vitesse $\vec{u}$, on définit sa valeur moyenne $\overline{\varphi}$ [9], [11], par :

$$(18)\qquad n\overline{\varphi} = \sum_i N_i\varphi_i = (N, \Phi)$$

avec

$$(19)\qquad n = \sum_i N_i$$

$$\varphi_i = \varphi(\vec{u_i}) \quad , \qquad \Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$$

$\overline{\varphi}$ a la même nature tensorielle que chaque composante φ_i de Φ.

En particulier la vitesse $\vec{u}$ du gaz, le tenseur des pressions $\mathbb{P}$, la pression hydrostatique p, la température T, le vecteur flux thermique sont donnés par :

$$(20)\qquad \begin{cases} \vec{u} = \frac{1}{n}\sum_i N_i \vec{u}_i \\ \mathbb{P} = m\sum_i N_i (\vec{u}_i - \vec{u})(\vec{u}_i - \vec{u}) \\ p = \frac{m}{3}\sum_i N_i (\vec{u}_i - \vec{u})^2 = k n T \\ \vec{q} = \frac{1}{2} m \sum_i N_i (\vec{u}_i - \vec{u})^2 (\vec{u}_i - \vec{u}) \end{cases}$$

2 - Equation de Transport

L'équation de transport est une équation pour la grandeur macroscopique $\overline{\varphi}$ Elle s'obtient en multipliant l'équation pour N_i dans (11) par φ_i et en sommant sur i, c'est à dire en multipliant scalairement (13) par Φ

$$(21)\qquad (\Phi, \frac{\partial}{\partial t} N) + (\Phi, \mathcal{A} N) = (\Phi, \mathcal{J}(N,N)) .$$

Le premier membre s'explicite en :

$$\frac{\partial}{\partial t}(n\overline{\varphi}) + \vec{\nabla}.(n\overline{\varphi\vec{u}}) - n\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial t} - n\,\overline{\vec{u}.\vec{\nabla}\varphi}$$

Quant au second membre on peut lui donner l'une des formes (14) (15) (16) ou (17). En particulier en utilisant (16) :

$$(22)\qquad (\Phi, \frac{\partial}{\partial t} N) + (\Phi, \mathcal{A} N) = \frac{1}{4}\sum_{i,j,k,l} (\varphi_i + \varphi_j - \varphi_k - \varphi_l)\, A^{ij}_{kl} N_k N_l .$$

Comme les vitesses possibles pour les particules sont en nombre fini p, le nombre d'équations de transport indépendantes pour les quantités $\overline{\varphi}$, avec $\varphi(\vec{u})$ indépendant de t et de $\vec{r}$, est également p ; ceci sera précisé dans le paragraphe suivant. En théorie cinétique classique on a une infinité d'équations de transport de Maxwell indépendantes pour les différents moments de f [23], [34].

C - INVARIANTS DES RENCONTRES

EQUATIONS DE CONSERVATION

1 - Invariants des Rencontres

Définition. On appelle invariant des rencontres une quantité $\varphi(\vec{u})$ qui est attachée à un phénomène de conservation au cours d'une collision.

Les collisions retenues ici sont celles qui, effectivement à partir de deux particules de vitesses $\vec{u_i}$ et $\vec{u_j}$ produisent deux particules de vitesses $\vec{u_k}$ et $\vec{u_l}$. Les invariants des rencontres sont donc les éléments Φ de $\mathbb{R}^p$ tels que :

$$\varphi_i + \varphi_j = \varphi_k + \varphi_l \qquad \text{pour tout } i, j, k, l \quad \text{tels que } A_{ij}^{kl} \neq 0$$

ou bien si on se rappelle (6) disant que $A_{ij}^{kl} = 0$ pour une collision irréalisable,

$$A_{ij}^{kl}(\varphi_i + \varphi_j - \varphi_k - \varphi_l) = 0 \qquad \forall\, i, j, k, l \ . \tag{23}$$

Les solutions Φ de (23) forment un espace vectoriel $\mathbb{F}$ appelé espace des invariants des rencontres ; on note par q sa dimension $(1 \leqslant q \leqslant p)$.

m, $m\vec{u}$, $\frac{1}{2} m |\vec{u}|^2$ sont des invariants des rencontres d'après (1); ces 5 solutions ne sont pas toujours indépendantes comme ceci sera souligné dans le paragraphe E (par indépendance on entend l'indépendance linéaire des vecteurs Φ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$).

On introduit des bases orthonormées dans $\mathbb{F}$ et dans $\mathbb{R}^p$:

Base de $\mathbb{F}$: $V_1, V_2, \ldots, V_q$

Base de $\mathbb{R}^p$: $V_1, V_2, \ldots, V_q, W_{q+1}, \ldots, W_p$

On a :

$$\begin{cases} N = \sum_{i=1}^{q} a_i V_i + \sum_{j=q+1}^{p} b_j W_j \\ a_i = (N, V_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, q \\ b_j = (N, W_j) \qquad j = q+1, \ldots, p \ . \end{cases} \tag{24}$$

2 - Propriétés des invariants des rencontres

Propriété. Si les hypothèses I ou II définies en (8) et (9) sur les probabilités de transition sont satisfaites les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(25)\quad \begin{cases} \alpha) & \Phi \in \mathbb{F} \\ \beta) & (\Phi,\ \mathcal{F}(U,V)) = 0 \qquad \forall\, U \in \mathbb{R}^p\ , \quad \forall\, V \in \mathbb{R}^p \\ \gamma) & (\Phi,\ \mathcal{F}(N,N)) = 0 \qquad \forall\, N \in \mathbb{R}^p\ . \end{cases}$$

Que $\beta)$ entraîne $\gamma)$ est évident, et que $\alpha)$ entraine $\beta)$ résulte de l'identité (16) et de la définition (23) de Φ invariant des rencontres.

On montre enfin que $\gamma)$ entraine $\alpha)$: pour cela on remarque que l'hypothèse $\gamma)$ en utilisant (16) est équivalente à :

$$\sum_{i,j,k,l} (\varphi_i + \varphi_j - \varphi_k - \varphi_l)\, A^{ij}_{kl}\, N_k\, N_l = 0 \qquad \forall\, N \in \mathbb{R}^p$$

ce qui s'écrit en utilisant les remarques (7)

$$\sum_{(k,l)} \sum_{(i,j)} (\varphi_i + \varphi_j - \varphi_k - \varphi_l)\, A^{ij}_{kl}\, N_k\, N_l = 0 \qquad \forall\, N \in \mathbb{R}^p\ .$$

Ce polynôme homogène en N_k est identiquement nul si et seulement si :

$$(26)\qquad \sum_{(i,j)} (\varphi_i + \varphi_j - \varphi_k - \varphi_l)\, A^{ij}_{kl} = 0 \qquad \forall\, (k,l)\ .$$

De (26) résulte l'égalité unique suivante obtenue en multipliant (26) par $(\varphi_k + \varphi_l)$ et en sommant sur tous les couples (k,l)

$$(27)\qquad \sum_{(k,l)\,(i,j)} A^{ij}_{kl}\, (\varphi_k + \varphi_l)(\varphi_i + \varphi_j - \varphi_k - \varphi_l) = 0$$

Si l'hypothèse II est réalisée on a

$$\sum_{(k,l)\,(i,j)} A^{ij}_{kl}\, (\varphi_k + \varphi_l)^2 = \sum_{(k,l)} \Big(\sum_{(i,j)} A^{ij}_{kl} \Big)\, (\varphi_k + \varphi_l)^2 =$$

$$= \sum_{(k,l)} \Big(\sum_{(i,j)} A^{kl}_{ij} \Big)\, (\varphi_k + \varphi_l)^2 = \sum_{(k,l)\,(i,j)} A^{ij}_{kl} (\varphi_i + \varphi_j)^2\ .$$

La seconde égalité résulte de (9) et la dernière est obtenue en échangeant le rôle des deux couples (i,j) et (k,l). Si l'hypothèse I est réalisée la démonstration de ces égalités est simplifiée.

Il résulte de ce calcul que l'on peut écrire (27) sous la forme :

$$(28) \qquad -\frac{1}{2} \sum_{(k,l)\,(i,j)} A_{kl}^{ij} (\varphi_i + \varphi_j - \varphi_k - \varphi_l)^2 = 0 \ .$$

La forme de (28) est très particulière et les solutions Φ de (28) sont les invariants des rencontres d'après (23). Toute solution de (26) est solution de (28), et réciproquement toute solution de (28) est solution de (26) comme il est simple de le vérifier. Ainsi $\gamma)$ entraîne bien $\alpha)$.

3 - Equations de conservation

Si Φ est un élément de $\mathbb{R}^p$ et si Φ est indépendant du temps t et du vecteur position $\vec{r}$, l'équation de transport associée (22) pour $\overline{\varphi}$ a la forme d'une équation de conservation si et seulement si le second membre est nul soit $(\Phi, \mathcal{J}(N,N)) = 0$. D'après (25) cela signifie $\Phi \in \mathbb{F}$.

Autrement dit l'équation de transport pour $\overline{\varphi}$ est une équation de conservation si et seulement si $\overline{\varphi}$ est une quantité macroscopique associée à un Φ invariant des rencontres.

$$(29) \qquad \frac{\partial}{\partial t}(N, \Phi) + (\Phi, \mathcal{A}N) = 0 \qquad\qquad \Phi \in \mathbb{F}$$

A chaque invariant des rencontres V_i est associée la quantité macroscopique a_i ; il correspond une équation de conservation pour a_i de la forme :

$$(30) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(a_i) + \vec{\nabla} . \vec{h_i}(a_1, \ldots, a_q, b_{q+1}, \ldots, b_p) = 0 \\ i = 1, 2, \ldots, q. \end{cases}$$

Les $\vec{h_i}$ ne dépendent pas explicitement de t et de $\vec{r}$; ce sont des combinaisons linéaires des a_i et b_j .

Il existe q invariants des rencontres linéairement indépendants donc q équations de conservation indépendantes et il n'y en a pas d'autres de cette forme. Ce sont par exemple si on choisit les q vecteurs de la base de $\mathbb{F}$ comme q invariants des rencontres indépendants les q équations (30). Ce système pour les q quantités a_i n'est pas fermé puisque les b_j y figurent. On remarque que la dérivée $\dfrac{\partial}{\partial t}$ opère sur les quantités a_i seules et que les dérivées spatiales portent sur les a_i et les b_j .

En particulier on peut écrire les équations de conservation classiques [9] [23] :

$$(31)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\rho \vec{u}) = 0 & \rho = nm \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{u}) + \vec{\nabla}.(\rho \vec{u}\vec{u}) + \vec{\nabla}.\mathbb{P} = 0 & \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{3}{2}p + \rho\dfrac{|\vec{u}|^2}{2}\right) + \vec{\nabla}.\left(\dfrac{3}{2}p\vec{u} + \vec{u}.\mathbb{P} + \vec{q}\right) = 0 . & \end{cases}$$

Pour ce modèle on peut parler de deux descriptions l'une microscopique caractérisée par la connaissance de N, c'est à dire des a_i et des b_j, l'autre macroscopique caractérisée par la connaissance des a_i seules. Les quantités a_i seront appelées variables d'état macroscopique du fluide. En théorie cinétique classique les variables d'état macroscopique du fluide sont ρ, $\vec{u}$, T [23]

D - THEOREME H. ETAT MAXWELLIEN

1 - Théorème H.

La fonction H de Boltzmann est définie par :

$$(32)\qquad H = \sum_i N_i \operatorname{Log} N_i \quad .$$

Pour un gaz spatialement homogène, H est une fonction du temps et on a :

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i (1 + \operatorname{Log} N_i)\frac{dN_i}{dt}$$

soit en utilisant les équations (11) et l'identité (15c) et en désignant par $\operatorname{Log} N$ la suite des p quantités $\operatorname{Log} N_i$:

$$(33)\qquad \frac{dH}{dt} = (\operatorname{Log} N, \mathcal{F}(N,N)) = \frac{1}{8}\sum_{i,j,k,l} \operatorname{Log}\frac{N_i N_j}{N_k N_l}\left(A^{ij}_{kl} N_k N_l - A^{kl}_{ij} N_i N_j\right)$$

H est une fonction décroissante du temps : ce résultat est classique avec

l'hypothèse I sur les probabilités de transition et il a été établi notamment par Heitler [31] avec l'hypothèse II. Il provient respectivement des inégalités suivantes valables quels que soient x et y strictement positifs

$$(y - x) \operatorname{Log} \frac{x}{y} \leqslant 0 \quad ; \quad y \operatorname{Log} \frac{x}{y} + y - x = -\int_x^y \operatorname{Log} \frac{t}{x}\, dt \leqslant 0$$

car avec l'hypothèse I il est évident que :

$$(34a) \qquad (\operatorname{Log} N\,,\ \mathcal{F}(N,N)) = \frac{1}{8} \sum_{i,j,k,l} A_{ij}^{kl} \operatorname{Log} \frac{N_i\ N_j}{N_k\ N_l} (N_k\ N_l - N_i\ N_j)$$

et avec l'hypothèse II on a d'après [31]

$$(34b) \qquad (\operatorname{Log} N\,,\ \mathcal{F}(N,N)) = \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l} A_{ij}^{kl} (N_i\ N_j \operatorname{Log} \frac{N_k\ N_l}{N_i\ N_j} + N_i\ N_j - N_k\ N_l)\,.$$

Remarque. Ce théorème permet d'affirmer que le second principe de la thermodynamique est valable pour un gaz décrit par (13) et traduit donc le caractère irréversible de l'évolution de ce gaz. Cependant la collision binaire de deux particules est un phénomène mécanique réversible. Le fait d'introduire un calcul statistique pour évaluer le terme dû aux collisions dans (13) a permis ce changement de caractère. Ceci a été discuté mathématiquement sur un exemple par Kac [35].

2 - Etat Maxwellien

On considère toujours un gaz spatialement homogène et on se propose de préciser l'état d'équilibre correspondant à $\frac{dH}{dt} = 0$. Cet état limite est dit état maxwellien comme en théorie cinétique classique [7], [9], [23], [34],[36].

Propriétés de l'état maxwellien : les densités dans un tel état sont caractérisées par l'une des quatre propriétés équivalentes suivantes :

$$(35) \quad \begin{cases} \alpha) & (\operatorname{Log} N,\ \mathcal{F}(N,N)) = 0 \\ \beta) & \mathcal{F}(N,N) = 0 \\ \gamma) & \operatorname{Log} N \text{ est un invariant des rencontres} \\ \delta) & A_{ij}^{kl} (N_i\ N_j - N_k\ N_l) = 0 \qquad \forall\ i,\ j,\ k,\ l \end{cases}$$

γ) et δ) équivalents résulte de la définition (23) d'un invariant des rencontres. Que β) entraine α) est évident. Il résulte immédiatement de (34a)

ou (34b) que α) entraîne γ) car les expressions $(y - x)\ \mathrm{Log}\ \frac{x}{y}$ ou $y\ \mathrm{Log}\ \frac{x}{y} + y - x$ sont négatives ou nulles, la nullité n'étant réalisée qu'avec $x = y$. On établit que δ) entraîne β) : avec l'hypothèse δ) on peut écrire

$$\mathcal{F}_i(N,N) = \frac{1}{2} \sum_{j,k,l} (A^{ij}_{kl}\ N_k\ N_l - A^{kl}_{ij}\ N_i\ N_j)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j} N_i\ N_j \left\{ \sum_{k,l} (A^{ij}_{kl} - A^{kl}_{ij}) \right\} = 0$$

la nullité provient de (8) ou (9) exprimant les hypothèses I ou II.

Pour un gaz dans un état maxwellien on a donc $\mathrm{Log}\ N$ dans $\mathbb{F}$: on peut donc introduire q coefficients c_i et écrire

$$\mathrm{Log}\ N = c_1 V_1 + c_2 V_2 + \ldots + c_q V_q \tag{36}$$

Comme N, les a_i sont des fonctions des q grandeurs $c_1, c_2, \ldots, c_q$, et de même les b_j. On a, V_{ij} étant la $j^{\text{ième}}$ composante de V_i :

$$\begin{cases} a_i = (N, V_i) = a_i(c_1, \ldots, c_q) \\ \quad = \sum_{j=1}^{p} \exp\left(\sum_{k=1}^{q} c_k\ V_{kj} \right) V_{ij} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, q\ . \tag{37}$$

Théorème

Soient $N^{(1)}$ et $N^{(2)}$ les densités dans deux états maxwelliens. Si $N^{(2)} - N^{(1)} \in \mathbb{F}^{\perp}$ alors $N^{(2)} = N^{(1)}$ ($\mathbb{F}^{\perp}$ est l'espace orthogonal à $\mathbb{F}$, $\mathbb{F} \oplus \mathbb{F}^{\perp} = \mathbb{R}^p$).

Soit $\mathbb{A}^{(1)}$ la matrice diagonale dont le terme non nul de la $i^{\text{ème}}$ ligne est $N_i^{(1)}$. On définit X par

$$X = (\mathbb{A}^{(1)})^{-1} (N^{(2)} - N^{(1)}) \quad \text{ou} \quad N_i^{(2)} = N_i^{(1)} (1 + X_i) \text{ pour } i = 1, \ldots, p.$$

1°) $\mathbb{A}^{(1)} X$ est dans $\mathbb{F}^{\perp}$ par hypothèse d'où :

$$(\mathbb{A}^{(1)} X, V_l) = 0 \qquad \forall l = 1, 2, \ldots, q.$$

ou bien

$$\sum_{i=1}^{p} N_i^{(1)} X_i\ V_{li} = 0 \qquad \forall l = 1, 2, \ldots, q\ . \tag{38}$$

2°) Y est un état maxwellien sachant qu'on définit Y par $Y_i = 1 + X_i$, $\forall i = 1, 2, \ldots, p$. En effet $\mathrm{Log}\ Y_i = \mathrm{Log}\ N_i^{(2)} - \mathrm{Log}\ N_i^{(1)}$ et puisque $\mathrm{Log}\ N^{(1)}$

et $\text{Log } N^{(2)}$ sont dans $\mathbb{F}$, voir (35), $\text{Log } Y$ est aussi un élément de $\mathbb{F}$. Il existe donc q coefficients x_k tels que :

$$\text{Log } Y = \sum_{k=1}^{q} x_k V_k \qquad \text{soit} \qquad Y_i = \exp\left(\sum_{k=1}^{q} x_k V_{ki}\right) .$$

Donc :

$$X_i = \exp\left(\sum_{k=1}^{q} x_k V_{ki}\right) - 1 \quad . \tag{39}$$

3°) Le théorème s'établit en portant (39) dans (38)

$$\sum_{i=1}^{p} N_i^{(1)} \left(\exp\left(\sum_{k=1}^{q} x_k V_{ki}\right) - 1\right) V_{li} = 0 \qquad \forall l = 1, \ldots, q.$$

On multiplie la $l^{\text{ième}}$ équation obtenue ci-dessus par x_l et on somme sur l; on obtient une équation unique qui s'écrit en posant $y_i = \sum_{l=1}^{q} x_l V_{li}$

$$\sum_{i=1}^{p} N_i^{(1)} \left(e^{y_i} - 1\right) y_i = 0$$

Comme $(e^x - 1)x$ est positif ou nul quel que soit x, la nullité n'ayant lieu que pour $x = 0$, et comme les $N_i^{(1)}$ sont strictement positifs on déduit de cette équation :

$$y_i = 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, p$$

soit $$\sum_{k=1}^{q} x_k V_{ki} = 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, p .$$

Donc $x_k = 0$ pour $k = 1, \ldots, q$ car les vecteurs V_k sont linéairement indépendants. En conséquence $X = 0$ et $N^{(1)} = N^{(2)}$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarquons que ce théorème est contenu dans le résultat d'unicité établi dans le théorème 1 de l'appendice II. Les deux raisonnements, celui fait précédemment et celui fait dans l'appendice II, sont analogues ; cependant dans le premier on raisonne à partir des densités elles-mêmes.

Conséquence

Les relations (37) $a_i = a_i(c_1, \ldots, c_q)$, $i = 1, \ldots, q$, définissent une bijection de $\mathbb{R}^q$ sur D_a. $D_a \subset \mathbb{R}^q$ étant l'ensemble décrit par $(a_1, \ldots, a_q)$ lorsque $(c_1, \ldots, c_q)$ parcourt $\mathbb{R}^q$.

Soient $(c_1^{(1)}, \ldots, c_q^{(1)})$ et $(c_1^{(2)}, \ldots, c_q^{(2)})$ deux points distincts de $\mathbb{R}^q$ tels que $a_i^{(1)} = a_i^{(2)}$ pour tout $i = 1, \ldots, q$. On définit $N^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$, par $\text{Log } N^{(\alpha)} = \sum_{k=1}^{q} c_k^{(\alpha)} V_k$. $N^{(\alpha)}$ est un état maxwellien. $a_i^{(1)} = a_i^{(2)}$ signifie $(N^{(1)}, V_i) = (N^{(2)}, V_i)$ pour $i = 1, \ldots, q$, autrement dit $N^{(1)} - N^{(2)} \in \mathbf{F}^{\perp}$. D'après le théorème ci-dessus on a $N^{(1)} = N^{(2)}$ et les relations (37) définissent une injection.

Remarque

Le jacobien des q relations (37) est toujours différent de 0.

Des expressions (37) on déduit :

$$(40) \qquad \frac{\partial a_i}{\partial c_l} = \sum_{j=1}^{p} V_{ij} V_{lj} \exp\left(\sum_{k=1}^{q} c_k V_{kj}\right) = \sum_{j=1}^{p} V_{ij} V_{lj} N_j .$$

La matrice carrée d'ordre q d'éléments $\frac{\partial a_i}{\partial c_l}$ est définie positive car

$$\sum_{i=1}^{q}\sum_{l=1}^{q} x_i x_l \frac{\partial a_i}{\partial c_l} = \sum_{j=1}^{p} N_j \left(\sum_{i=1}^{q} x_i V_{ij}\right)\left(\sum_{l=1}^{q} x_l V_{lj}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{p} N_j \left(\sum_{i=1}^{q} x_i V_{ij}\right)^2 \geqslant 0$$

la nullité n'ayant lieu que pour $\sum_{i=1}^{q} x_i V_{ij} = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, p$, c'est à dire $x_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, q$. Le déterminant de cette matrice est donc non nul ce qui établit la remarque.

Conclusions

1 - D_a est aussi l'ensemble décrit par $(a_1, \ldots, a_q)$ avec $a_i = (N, V_i)$ lorsque N décrit $(\mathbb{R}^+)^p$: en effet d'après le théorème 1 de l'appendice II les équations

$$(X, V_i) = a_i \quad i = 1, \ldots, q, \qquad (\text{Log } X, W_j) = 0 \quad j = q+1, \ldots, p$$

ont une solution unique ; en conséquence on peut écrire a_i sous la forme (37).

2 - Soit un gaz dont les variables d'état macroscopique sont $a_1, \ldots, a_q$ données. Il existe un état maxwellien et un seul de densités $N_i^{(o)}$, tel que : $(N^{(o)}, V_i) = a_i$, $(\text{Log } N^{(o)}, W_j) = 0$. Cet état maxwellien est dit <u>associé</u> aux variables d'état macroscopique $a_1, \ldots, a_q$.

3 - Soit un gaz dont l'état microscopique N est donné. Il existe un état maxwellien $N^{(o)}$ et un seul qui lui soit associé c'est à dire tel que $(N, V_i) = (N^{(o)}, V_i) \quad \forall i = 1, \ldots, q.$

4 - Les relations (37) définissent une correspondance biunivoque entre les points $(c_1, \ldots, c_q) \in \mathbb{R}^q$ et les points $(a_1, a_2, \ldots, a_q) \in D_a$. L'application directe de même que l'application inverse est indéfiniment dérivable d'après les théorèmes sur les fonctions implicites [12]. D_a est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^q$ [12].

5 - Soit un gaz dans un état maxwellien dont les variables d'état macroscopique sont $a_1, \ldots, a_q$, alors N s'exprime uniquement en fonction des a_i et les b_j sont des fonctions déterminées des a_i . Ce résultat est à rapprocher d'un résultat analogue en théorie cinétique classique à savoir que la fonction de distribution maxwellienne est fonction seulement des variables d'état macroscopique $\rho, \vec{u}, T$ [23].

Si l'expression de N en fonction des quantités a_i est celle déterminée ci-dessus et si les quantités a_i dépendent de t et de $\vec{r}$ on dit que N est <u>localement maxwellien</u>.

3 - Une propriété de l'état maxwellien

Les variables d'état macroscopique a_k, $k = 1, \ldots, q$, étant données, les densités N_i , $i = 1, \ldots, p$, de l'état maxwellien associé assurent le minimun de la fonction H de Boltzmann.

Ceci généralise le résultat établi par Godunov et Sultangazin pour un modèle particulier [21]. C'est un problème d'extrémun lié aussi on considère la fonction

$$H^* = H - \sum_{k=1}^{q} q_k a_k = \sum_{i=1}^{p} \left\{ N_i \text{ Log } N_i - \sum_{k=1}^{q} q_k N_i V_{ki} \right\}$$

avec $a_k = (N, V_k)$ donné et où les q_k sont les multiplicateurs de Lagrange. La condition d'extrémun cherché s'exprime par

$$\frac{\partial H^*}{\partial N_i} = \text{Log } N_i + 1 - \sum_{k=1}^{q} q_k V_{ki} = 0 \ .$$

Ceci détermine les N_i en fonction des multiplicateurs q_k et pour obtenir ces derniers on utilise les relations définissant les a_k. D'où :

$$N_i = \exp\left(\sum_{k=1}^{q} q_k V_{ki} - 1\right) \qquad i = 1, \ldots, p \ .$$

$$a_l = \sum_{i=1}^{p} \exp\left(\sum_{k=1}^{q} q_k V_{ki} - 1\right) V_{li} \qquad l = 1, 2, \ldots, q \ .$$

Ces dernières relations sont analogues aux relations (37) et donnent bien les q_k en fonction des a_l . On obtient bien un minimum de la fonction H car H est une fonction convexe des N_i . La solution exhibée est la solution maxwellienne associée aux variables d'état macroscopique $a_1, \ldots, a_q$. Les multiplicateurs de Lagrange q_k sont reliés simplement auxcoefficients c_l introduits dans le paragraphe 2 précédent. On a :

(41) $\qquad c_1 = q_1 - \sqrt{p} \qquad$ et $\qquad c_k = q_k \qquad$ pour $\quad k = 2, \ldots, q.$

E - QUELQUES EXEMPLES DE MODELES DE GAZ A REPARTITION DISCRETE DE VITESSES

1 - Quelques modèles particuliers.

Dans la littérature on rencontre quelques modèles de gaz à répartition discrète de vitesses ; le nombre de vitesses permises est toujours très limité et est au maximum 8.

Un modèle à deux vitesses est présenté par Carleman dans son livre [6] où il considère un gaz fictif linéaire dont les molécules ne peuvent posséder que

deux vitesses différentes qui s'interchangent par les chocs et où il introduit pour les densités N_1 et N_2 de ces deux espèces de molécules le système

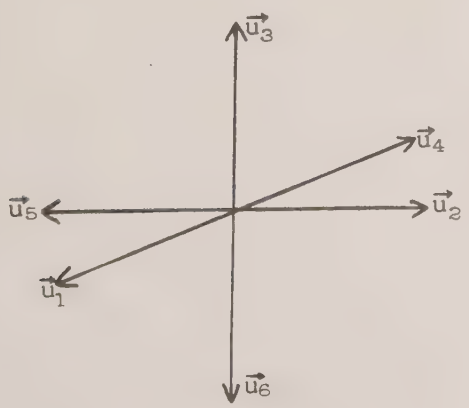
$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_1}{\partial t} + \dfrac{\partial N_1}{\partial x} = N_2^2 - N_1^2 \\ \dfrac{\partial N_2}{\partial t} - \dfrac{\partial N_2}{\partial x} = N_1^2 - N_2^2 \end{cases}$$

Les deux vitesses sont $\vec{u_1} = (1, 0, 0)$ et $\vec{u_2} = (-1, 0, 0)$ et d'après la forme des seconds membres les collisions non triviales sont $\vec{u_1}, \vec{u_1} \longrightarrow \vec{u_2}, \vec{u_2}$ et la collision inverse ; la conservation de la quantité de mouvement n'est pas respectée au cours de telles collisions. Pour cette raison le modèle que l'on a décrit en A ne conduit pas pour deux vitesses au système de Carleman mais au système ci-dessus avec 0 pour seconds membres.

Le modèle avec quatre vitesses de même module, ces vitesses étant les vecteurs joignant le centre d'un carré à ses sommets, est ancien puisqu'il en est déjà question dans les travaux de Maxwell [39]. Récemment il a été utilisé par Hardy et Pomeau [27] et par Harris [29]. Dans [28] Harris décrit un modèle à 6 vitesses de même module, ces vitesses étant les vecteurs joignant le centre d'un hexagone à ses sommets ; ceci a été fait indépendamment de notre description d'un modèle plan régulier à 2r vitesses [14]. Ce dernier modèle amélioré par rapport au travail cité est présenté dans le paragraphe 2 suivant ; pour $r = 2$ et $r = 3$ on retrouve les modèles à 4 et 6 vitesses mentionnés ci-dessus.

Enfin Broadwell a introduit deux modèles spatiaux : les vitesses sont de même module c et ont des directions réparties régulièrement dans l'espace.

Les vitesses dans un premier modèle [2] sont les vecteurs joignant le centre d'un hexaèdre à ses 6 sommets. Les collisions non triviales sont



$\vec{u_1}, \vec{u_4} \longrightarrow \vec{u_2}, \vec{u_5}$, $\vec{u_1}, \vec{u_4} \longrightarrow \vec{u_3}, \vec{u_6}$, $\vec{u_2}, \vec{u_5} \longrightarrow \vec{u_3}, \vec{u_6}$ et les trois collisions inverses. Les probabilités de transitions données par Broadwell correspondent au cas particulier (4) avec $\alpha_{ij}^{kl} = \frac{1}{3}$ pour les collisions non triviales. Si bien que le système d'équations pour les densités N_i s'écrit, avec la convention $N_k = N_l$ si $k \equiv l$ modulo 6,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_i}{\partial t} + \vec{u}_i \cdot \vec{\nabla} N_i = \dfrac{2cS}{3} \left(N_{i+1} N_{i+4} + N_{i+2} N_{i+5} - 2 N_i N_{i+3} \right) \\ i = 1, 2, \ldots, 6 \end{cases}$$

Pour ce modèle les invariants des rencontres sont les vecteurs Φ de $\mathbb{R}^6$ solutions de :

$$\varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_5 = \varphi_3 + \varphi_6 \quad .$$

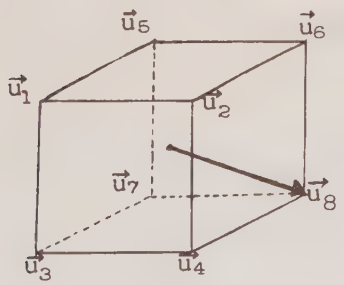
L'espace $\mathbf{F}$ a donc pour dimension 4 ; on peut prendre dans $\mathbf{F}$ une base simple pour les calculs mais sans intérêt physique, ou bien on peut choisir les 4 vecteurs orthonormés correspondant à la conservation de la masse et de la quantité de mouvement au cours d'une collison c'est à dire :

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} (1, 1, 1, 1, 1, 1) \qquad V_2 = \frac{1}{\sqrt{\sum_i u_i^2}} (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$$

$$V_3 = \frac{1}{\sqrt{\sum_i v_i^2}} (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6) \qquad V_4 = \frac{1}{\sqrt{\sum_i w_i^2}} (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6)$$

si on note par (u_i, v_i, w_i) les composantes de $\vec{u}_i$. Les 4 équations de conservation associées sont alors les équations pour ρ et $\rho \vec{u}$ écrites en (31).

Broadwell dans un second modèle [3] a pris pour $\vec{u}_i$ les vecteurs joignant le centre d'un cube à ses 8 sommets. Les collisions non triviales sont de deux sortes ; celles du type $\vec{u}_1, \vec{u}_4 \longrightarrow \vec{u}_2, \vec{u}_3$ et celles du type $\vec{u}_1, \vec{u}_8 \longrightarrow \vec{u}_2, \vec{u}_7$. Broadwell a affecté aux collisions du premier type et du second type les probabilités de transition respectives $A_{14}^{23} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, c\, S$ et $A_{18}^{27} = \frac{c\, S}{2}$ correspondant au cas particulier (4) avec $\alpha_{14}^{23} = \frac{1}{2}$ et $\alpha_{18}^{27} = \frac{1}{4}$. On a un système de 8 équations analogues, par exemple celle pour N_1 s'écrit :



$$\frac{\partial N_1}{\partial t} + \vec{u}_1 \cdot \vec{\nabla} N_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}\, c\, S \left(N_2 N_3 + N_2 N_5 + N_3 N_5 - N_1 N_4 - N_1 N_6 - N_1 N_7 \right)$$

$$+ \frac{c\, S}{2} \left(N_2 N_7 + N_3 N_6 + N_4 N_5 - 3 N_1 N_8 \right)$$

Pour ce modèle $\mathbf{F}$ a pour dimension 4, la base de $\mathbf{F}$ pouvant être, comme dans l'exemple précédent, les 4 vecteurs associés à la conservation de la masse et de la quantité de mouvement au cours d'une collision.

Dans ces 2 derniers modèles il n'apparaît pas d'autres invariants des rencontres que les invariants classiques.

Si on tient à l'hypothèse d'une répartition régulière des vitesses l'augmentation du nombre de vitesses dans l'espace est limitée. Par contre dans le plan les vitesses disposées régulièrement peuvent être en aussi grand nombre que l'on veut ; ceci fait l'objet du paragraphe suivant .

2 - Modèle plan régulier à 2r vitesses de même module

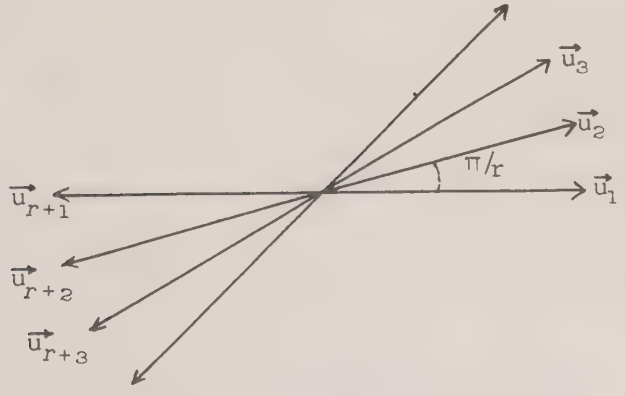
a) Description du modèle

On décrit un modèle à 2r vitesses de même module dont les directions sont réparties régulièrement dans le plan.

On conviendra de considérer que deux quantités affectées d'indices congrus modulo 2r sont égales.

Les 2r vitesses sont $\vec{u}_i$ $i = 1, 2, \ldots, 2r$ telles que

$$\begin{cases} |\vec{u}_i| = c \\ \vec{u}_i + \vec{u}_{i+r} = 0 \\ \vec{u}_{i+1} \text{ se déduit de } \vec{u}_i \text{ par une rotation d'angle } \dfrac{\pi}{r} . \end{cases}$$



Chercher les collisions non triviales c'est chercher les vecteurs $\vec{u}_k$ et $\vec{u}_l$ connaissant $\vec{u}_i$ et $\vec{u}_j$ tels que

$$\vec{u}_i + \vec{u}_j = \vec{u}_k + \vec{u}_l \ .$$

Ceci se résoud facilement géométriquement, on a

$$\begin{cases} \vec{u}_i \ , \vec{u}_j \longrightarrow \vec{u}_i \ , \vec{u}_j & \text{si } j \neq i + r \\ \vec{u}_i \ , \vec{u}_{i+r} \longrightarrow \vec{u}_j \ , \vec{u}_{j+r} & \text{pour tout } i \text{ et tout } j \ . \end{cases}$$

Les collisions binaires intéressantes sont évidemment les secondes. Les vitesses des particules après collision des particules ayant pour vitesses $\vec{u}_i$ et $\vec{u}_{i+r}$ avant collision ne sont pas déterminées de manière unique ; on a pour elles r possibilités et on va attribuer une probabilité à chaque éventualité :

> Les particules de vitesses $\vec{u}_i$, $\vec{u}_{i+r}$ donnent après collision les particules de vitesses $\vec{u}_{i+l}$, $\vec{u}_{i+l+r}$ avec la probabilité α_l .

α_l est choisi indépendant de i ; il ne dépend que de l c'est à dire de l'angle $\frac{\pi l}{r}$ dont il faut faire tourner le support de $\vec{u}_i$ et $\vec{u}_{i+r}$ pour obtenir le support de $\vec{u}_{i+l}$ et $\vec{u}_{i+l+r}$. α_l et α_k sont égaux si l et k sont congrus modulo r .

Hypothèse de la collision inverse. Si un couple de particules de vitesses $\vec{u}_i$, $\vec{u}_{i'}$ prend après collision les vitesses $\vec{u}_j$, $\vec{u}_{j'}$ avec la probabilité φ alors au cours de la collision inverse les vitesses $\vec{u}_i$, $\vec{u}_{i'}$ sont prises avec la même probabilité.

Par suite :

$$\alpha_l = \alpha_{-l} \qquad \forall l = 1, 2, \ldots , r \ .$$

Cette même égalité aurait pu être déduite de considérations de symétrie.

En définitive on a introduit r coefficients α_l tels que

$$\alpha_l \geqslant 0 \quad , \quad \sum_{l=1}^{r} \alpha_l = 1 \ . \tag{42}$$

On peut expliciter le lien entre ces coefficients et les probabilités de transition introduites dans le paragraphe A - 2. On est dans le cas particulier des expressions (4)

$$A_l^{\,i+l\;\;i+l+r}_{\;\;i+r} = 2cS\,\alpha_l \qquad l = 1, \ldots, r.$$

L'hypothèse de la collision inverse est identique à l'hypothèse I de microréversibilité car

$$A_{i+l\;\;i+l+r}^{\;\;i\;\;\;\;i+r} = 2cS\,\alpha_{-l}$$

L'hypothèse II du bilan semi détaillé est satisfaite quels que soient les α_l vérifiant (42) car :

$$\sum_{l=1}^{r} A_i^{\,i+l\;\;i+l+r}_{\;\;i+r} = \sum_{l=1}^{r} 2cS\,\alpha_l = 2cS$$

$$\sum_{l=1}^{r} A_{i+l}^{\;\;i\;\;\;\;i+r}_{\;\;i+l+r} = \sum_{l=1}^{r} 2cS\,\alpha_{-l} = 2cS\ .$$

Les équations décrivant l'évolution du milieu s'écrivent ici :

$$(43) \qquad \frac{\partial N_i}{\partial t} + \vec{u}_i \cdot \vec{\nabla} N_i = 2cS \sum_{l=1}^{r} (\alpha_{-l}\, N_{i+l}\, N_{i+l+r} - \alpha_l\, N_i\, N_{i+r}) .$$

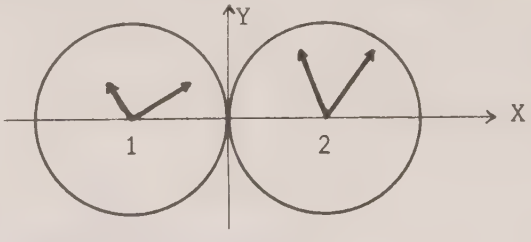
b) Deux exemples particuliers

Premièrement on suppose que lors d'une collision entre les particules de vitesses $\vec{u}_i$, $\vec{u}_{i+r}$ les différents couples $\vec{u}_{i+l}$, $\vec{u}_{i+l+r}$ sont obtenus avec la même probabilité, on dira que le choc est isotrope , et ceci correspond à $\alpha_l = \frac{1}{r}$ pour $l = 1, \ldots, r$. Les modèles plan à 4 et 6 vitesses utilisés par Harris [28] [29] entrent dans ce cadre. Les équations (43) s'écrivent :

$$(44) \qquad \frac{\partial N_i}{\partial t} + \vec{u}_i \cdot \vec{\nabla} N_i = \frac{2cS}{r} \sum_{l=1}^{r} (N_{i+l}\, N_{i+l+r} - N_i\, N_{i+r}) .$$

Deuxièmement à partir de l'étude du choc élastique de deux sphères on élabore un modèle avec des α_l différents. Lors du choc élastique de deux sphères 1 et 2 si les composantes des vitesses avant et après collision sont respectivement $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$ et $(X_1', Y_1'), (X_2', Y_2')$ on a les relations :

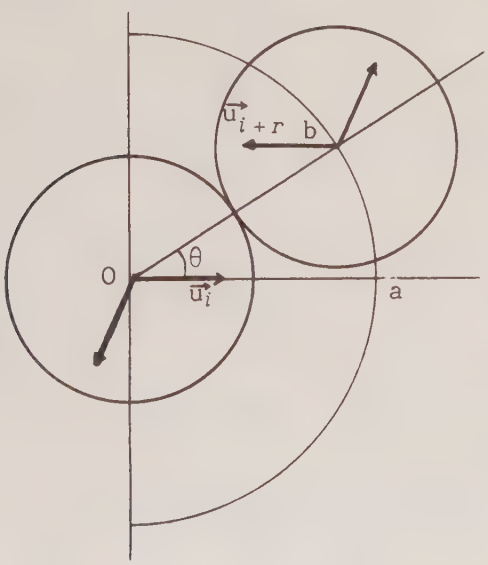
$$\begin{cases} Y_1 = Y_1' & X_1 = X_2' \\ Y_2 = Y_2' & X_2 = X_1' \end{cases}$$

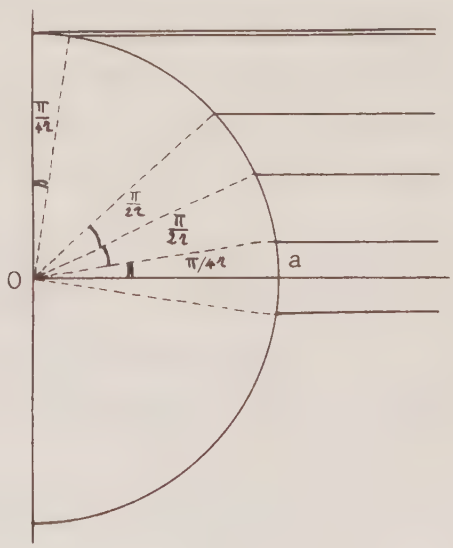


Donc si avant collision les vitesses sont opposées, après collision les vitesses sont encore opposées, leurs modules demeurant inchangés.

On suppose que les sphères envisagées ont pour diamètre σ ; on partage le demi-cercle de rayon σ centré au centre de la molécule de vitesse $\vec{u}_i$ en $2r$ parties égales (voir figure). Lorsque le centre de la molécule de vitesse $\vec{u}_{i+p}$ arrive en b telle que $(\overrightarrow{Oa}, \overrightarrow{Ob}) = \theta$ la vitesse prise par cette molécule a pour direction la direction symétrique de $\overrightarrow{Oa}$ par rapport à $\overrightarrow{Ob}$. Donc pour θ multiple de $\pi/2r$ les vitesses des molécules après collision appartiennent à l'ensemble des $2r$ vitesses données. Plus précisément pour $\theta = \frac{k\pi}{2r}$ avec $k = -r, -r+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, r,$ les vecteurs après collision des molécules de vitesses $\vec{u}_i$, $\vec{u}_{i+r}$ sont respectivement $\vec{u}_{i+k+r}$, $\vec{u}_{i+k}$. Pour $\theta = \frac{k\pi}{2r} + \frac{\pi}{4r}$ le choc élastique de ces deux sphères donnerait des vitesses opposées dont la direction serait telle que $\vec{u}_{i+k}$ et $\vec{u}_{i+k+1}$ soient symétriques par rapport à elle.
On introduit cette suite de valeurs intermédiaires $\theta = k\frac{\pi}{2r} + \frac{\pi}{4r}$ avec $k = -r, -r+1, \ldots, 0, 1, \ldots, r-1$.

On admet que pour $\theta \in \left[\frac{\pi}{4r} + (k-1)\frac{\pi}{2r}, \frac{\pi}{4r} + k\frac{\pi}{2r}\right[$ le résultat de la collision est le couple de particules de vitesses $\vec{u}_{i+k}$, $\vec{u}_{i+k+r}$, avec $k = -r+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, r-1$, et pour $\theta \in \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4r}, \frac{\pi}{2}\right]$ ou $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4r}\right[$ le résultat est $\vec{u}_i$, $\vec{u}_{i+r}$.





On trace les trajectoires limites des centres des molécules de vitesse $\vec{u}_{i+r}$ avant la collision correspondant aux angles $\theta = k\frac{\pi}{2r} + \frac{\pi}{4r}$ avec $k = -r, -r+1, \ldots, 0, 1, \ldots, r-1$. La distance entre deux trajectoires limites s'évalue aisément, par exemple entre celles correspondant à

$\theta = \frac{\pi}{4r} + (k-1)\frac{\pi}{2r}$ et $\theta = \frac{\pi}{4r} + k\frac{\pi}{2r}$ elle vaut $2\sigma \cos\frac{k\pi}{2r} \cdot \sin\frac{\pi}{4r}$.

Ainsi le nombre de collisions par unité de temps et dans une unité de volume entre les molécules ayant les vitesses $\vec{u_i}$, $\vec{u_{i+r}}$ avant la collision et $\vec{u_{i+k}}$, $\vec{u_{i+k+r}}$ après la collision est proportionnel, ce dernier couple pouvant être obtenu de deux manières différentes, à

$$2\sigma \left(\cos\frac{k\pi}{2r} + \cos(r-k)\frac{\pi}{2r}\right) \sin\frac{\pi}{4r} \qquad \text{pour } k = 1, 2, \ldots, r-1.$$

$$2\sigma \left(1 - \cos\frac{\pi}{4r} + \sin\frac{\pi}{4r}\right) \qquad \text{pour } k = 0 .$$

On posera donc pour ce modèle :

$$(45) \qquad \begin{cases} \alpha_0 = 1 - \cos\frac{\pi}{4r} + \sin\frac{\pi}{4r} \\ \alpha_k = \left(\cos\frac{k\pi}{2r} + \cos(r-k)\frac{\pi}{2r}\right) \sin\frac{\pi}{4r} \qquad \text{pour } k = 1, 2, \ldots, r-1. \end{cases}$$

On vérifie que $\sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k = 1$ et que l'hypothèse de la collision inverse est satisfaite, $\alpha_k = \alpha_{r-k}$.

c) Détermination de la dimension q de l'espace $\mathbb{F}$ des invariants des rencontres

L'hypothèse de la collision inverse n'est pas utilisée. Certaines probabilités α_k peuvent être nulles ; on désigne par α_{k_i} $(i = 1, \ldots, s)$ les probabilités non nulles et par d le P.G.C.D. des k_i et de r . Φ est un invariant des rencontres si et seulement si

$$(46) \qquad \begin{cases} \varphi_i + \varphi_{i+r} = \varphi_{i+l} + \varphi_{i+l+r} \\ \text{pour } i = 1, 2, \ldots, 2r, \qquad l = k_1, k_2, \ldots, k_s \end{cases}$$

Résoudre ce système c'est résoudre, si l'on pose $x_i = \varphi_i + \varphi_{i+r}$, le système suivant

$$(47) \qquad x_i = x_{i+k_\alpha} \qquad i = 1, 2, \ldots, r, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, s$$

Ce système comprend rs équations ; il est équivalent au système suivant

$$(48) \qquad x_i = x_{i+d} \qquad i = 1, 2, \ldots, r.$$

En effet il est évident que $x_i = x_{i+d}$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, r$ entraîne $x_i = x_{i+k_\alpha}$ car k_α est un multiple de d . Pour la réciproque on utilise

l'identité de Bezout pour les nombres entiers disant qu'il existe des entiers $l_1, l_2, \ldots, l_s, l_r$ tels que

$$d = l_1 k_1 + l_2 k_2 + \ldots + l_s k_s + l_r r$$

si bien qu'on peut écrire $x_{i+d} = x_{i+l_1 k_1 + l_2 k_2 + \cdots + l_s k_s + l_r r}$. On utilise convenablement le système (47) et on arrive à $x_i = x_{i+d}$. Le système (48) se résoud en

$$x_i = x_{i+d} = x_{i+2d} = \ldots = x_{i+(\frac{r}{d}-1)d} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, d.$$

autrement dit on a d variables arbitraires, $x_1, \ldots, x_d$ par exemple, et les autres s'expriment en fonction d'elles.
Par suite la solution de (46) dépend de $r+d$ φ_i arbitraires par exemple φ_1, φ_{r+1} ; φ_2, φ_{r+2} ; ... ; φ_d, φ_{r+d} ; $\varphi_{r+d+1}, \varphi_{r+d+2}, \ldots, \varphi_{2r}$.

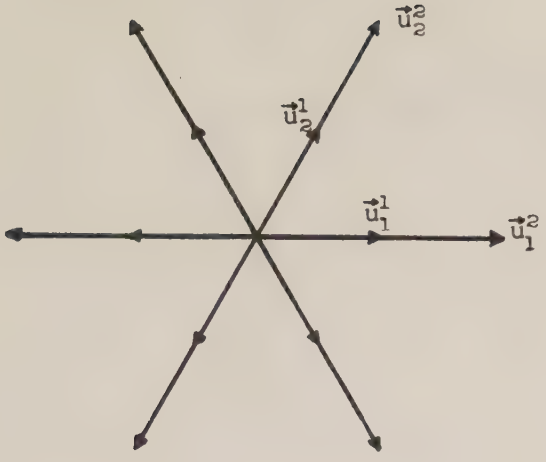
Conclusion. La dimension q de $\mathbb{F}$ est donc $r+d$.

Remarque. La dimension de $\mathbb{F}$ est supérieure ou égale à $r+1$: il existe en général des invariants des rencontres autres que les invariants classiques correspondant à la conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Si α_1 est non nul la dimension de $\mathbb{F}$ est alors $r+1$.

3 - Modèle plan avec des vitesses de modules différents

Les vitesses proposées dans les modèles précédents ont toutes même module mais on peut concevoir des modèles dans lesquels les vitesses ont des modules différents. Des modèles simples s'obtiennent par superposition de deux ou plusieurs modèles du type décrit dans le paragraphe précédent. La superposition de deux modèles n'est intéressante que s'il y a couplage entre eux c'est à dire que s'il existe des collisions non triviales entre deux particules dont l'une a pour vitesse un vecteur correspondant à l'un des modèles, et l'autre à l'autre.

1er exemple. Soit un modèle à 12 vitesses obtenu comme superposition de deux modèles plan régulier à 6 vitesses comme indiqué sur la figure.



Par un raisonnement géométrique on voit qu'il n'y a pas de collision non triviale possible entre deux particules de vitesses $\vec{u}_i^1$ et $\vec{u}_j^2$ sauf si $|\vec{u}_j^2| = 2|\vec{u}_i^1|$. Si $|\vec{u}_j^2| = 2|\vec{u}_j^1|$ les seules collisions non triviales qui existent sont :

$$\begin{cases} \vec{u}_i^\alpha \ , \ \vec{u}_{i+3}^\alpha \longrightarrow \vec{u}_{i+l}^\alpha \ , \ \vec{u}_{i+l+3}^\alpha \\ \alpha = 1, 2 \ ; \quad i = 1, 2, 3 \ ; \quad l = 1, 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{u}_{i+2}^1 \ , \ \vec{u}_i^2 \longrightarrow \vec{u}_{i-1}^1 \ , \ \vec{u}_{i+1}^2 \\ i = 1, 2, \ldots, 6 \quad \text{et les collisions} \end{cases}$$

inverses. Dans ce cas **F** a pour dimension $q = 5$.

On peut envisager maintenant le modèle suivant à $6(\nu_1 + \nu_2 + 1)$ vitesses notées

$$\vec{u}_i^\alpha \qquad i = 1, 2, \ldots, 6 \ ; \quad \alpha = -\nu_2, -\nu_2 + 1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \nu_1$$

tels que :

$$\begin{cases} |\vec{u}_i^\alpha| = 2^\alpha c \\ \text{pour } i \text{ fixé, les } \vec{u}_i^\alpha \text{ ont toutes même direction} \\ \text{On passe de } \vec{u}_i^\alpha \text{ à } \vec{u}_{i+1}^\alpha \text{ par une notation de } + \frac{\pi}{3} \ . \end{cases}$$

La conservation de l'énergie au cours d'une collision entraîne qu'il ne peut y avoir de collision non triviale entre deux particules de vitesses $\vec{u}_i^\alpha$ et $\vec{u}_i^{\alpha'}$ que si $\alpha - \alpha'$ vaut 0,1 ou -1. D'après l'étude ci-dessus pour la superposition de deux modèles réguliers à 6 vitesses, on voit donc que les collisions non triviales pour ce modèle sont :

$$\begin{cases} \vec{u}_i^\alpha \ , \ \vec{u}_{i+3}^\alpha \longrightarrow \vec{u}_{i+l}^\alpha \ , \ \vec{u}_{i+l+3}^\alpha \\ i = 1, 2, 3 \ ; \quad l = 1, 2 \ ; \quad \alpha = -\nu_2, -\nu_2 + 1, \ldots, 0, 1, \ldots, \nu_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{u}_{i+2}^\alpha \ , \ \vec{u}_i^{\alpha+1} \longrightarrow \vec{u}_{i-1}^\alpha \ , \ \vec{u}_{i+1}^{\alpha+1} \\ i = 1, 2, \ldots, 6 \ ; \quad \alpha = -\nu_2, -\nu_2 + 1, \ldots, 0, 1, \ldots, \nu_1 - 1 \end{cases}$$

et les collisions inverses.

Pour ce modèle les équations sont toutes couplées car il n'y a qu'une classe d'équivalence selon la relation (3).

2ème exemple. On donne enfin un dernier exemple constitué à partir de la superposition de deux modèles plan réguliers à 2r vitesses. En général il n'est pas facile de déterminer les collisions non triviales. Cependant pour r impair, $|\vec{u}_i^1| = |\vec{u}_i^2| \sin \frac{\pi}{2r}$, les $\vec{u}_i^\alpha$ ayant pour i fixé la même direction, on peut voir géométriquement que les seules collisions non triviales sont les suivantes :

$$\vec{u}_i^\alpha \ , \ \vec{u}_{i+r}^\alpha \longrightarrow \vec{u}_{i+l}^\alpha \ , \ \vec{u}_{i+l+r}^\alpha \qquad i = 1, 2, \ldots, r \ ; \ l = 1, 2, \ldots, r-1 \ ; \ \alpha = 1, 2.$$

$$\vec{u}_i^2 \ , \ \vec{u}_{i+\frac{r-1}{2}}^1 \longrightarrow \vec{u}_{i+1}^2 \ , \ \vec{u}_{i+\frac{r-1}{2}+r}^1 \qquad i = 1, 2, \ldots, 2r$$

et les collisions inverses.

Avec r pair on peut construire un modèle analogue à condition de prendre les vitesses $\vec{u}_i^1$ et $\vec{u}_i^2$ faisant un angle de $\pi/2r$.

On peut comme pour le 1er exemple considérer la superposition d'un nombre quelconque de modèles plan réguliers à 2r vitesses.

Remarque

On peut à partir des exemples précédents construire d'autres modèles de la manière suivante : les vitesses possibles sont $\vec{u}_i^* = \vec{U} + \vec{u}_i$ où $\vec{u}_i$ appartient à l'un des modèles décrits précédemment et $\vec{U}$ est un vecteur fixé. Pour de tels modèles les collisions non triviales sont les mêmes que dans le cas $\vec{U}$ nul.

Ces nouveaux modèles sont intéressants en vue du calcul numérique sur ordinateur ; pour un gaz réel donné on peut prendre par exemple pour $\vec{U}$ une vitesse macroscopique de référence du gaz et envisager un modèle à répartition discrète de vitesses de la forme $\vec{u}_i^*$: on a ainsi des vitesses discrètes "réparties autour de $\vec{U}$ ".

F - INTRODUCTION DES COLLISIONS TERNAIRES POUR LE MODELE PLAN REGULIER A 2r VITESSES DE MEME MODULE

Harris [28] a introduit les collisions ternaires pour un modèle plan régulier à 6 vitesses et il a montré que pour un tel gaz modérément dense le théorème H de Boltzmann est encore valable. Cependant il n'a pas pris en compte toutes les collisions ternaires permises par le modèle. C'est à la suite de ce travail que l'on a envisagé les collisions ternaires pour le modèle décrit en E.2, à savoir le modèle plan régulier à 2r vitesses de même module.

1 - Les collisions ternaires.

On entend par collision ternaire la rencontre simultanée de 3 particules. Au cours d'une collision il y a conservation de la masse et de l'énergie ce qui est automatiquement vérifiée. Il y a aussi conservation de la quantité de mouvement : si les 3 particules ont pour vitesses avant et après collision respectivement $\vec{u_i}$, $\vec{u_j}$, $\vec{u_k}$ et $\vec{u_{i'}}$, $\vec{u_{j'}}$, $\vec{u_{k'}}$ alors la relation suivante doit être satisfaite

$$\vec{u_i} + \vec{u_j} + \vec{u_k} = \vec{u_{i'}} + \vec{u_{j'}} + \vec{u_{k'}} \tag{49}$$

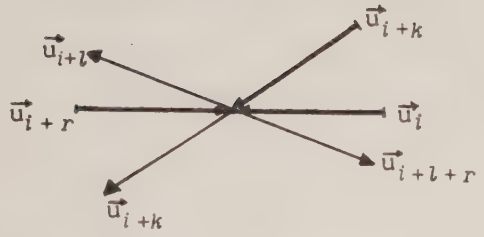
L'étude de (49) n'est pas simple, si on l'écrit sous la forme $\sum_{i=1}^{6} \vec{u_{k_i}} = 0$ on a les solutions

$$\begin{cases} \vec{u_i} + \vec{u_{i+r}} + \vec{u_j} + \vec{u_{j+r}} + \vec{u_k} + \vec{u_{k+r}} = 0 \\ \vec{u_i} + \vec{u_{i+2g}} + \vec{u_{i+4g}} + \vec{u_j} + \vec{u_{j+2g}} + \vec{u_{j+4g}} = 0 \\ g = \dfrac{r}{3}, \quad i, j, k \text{ quelconques} \end{cases} \tag{50}$$

Pour r non multiple de 3 les solutions données par la seconde égalité n'existent évidemment pas. Pour les première valeurs de r, r = 3, 4, 5, 6, 8 on a vérifié qu'il n'y a pas d'autres solutions ; pour r quelconque le problème reste à résoudre. Dans la suite on ne tient compte que des solutions (50).

Suivant ce que l'on appelle "la configuration d'entrée" c'est à dire la figure formée par les trois vecteurs vitesses avant la collision on distingue les collisions ternaires de type B, C ou D_s . Deux configurations d'entrée sont dites identiques si elles se déduisent l'une de l'autre par symétrie ou rotation.

Collision de type B.

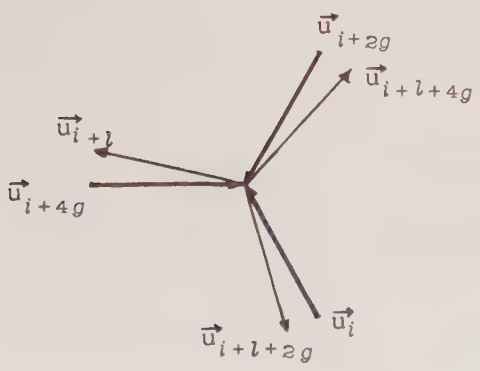


$$\begin{cases} \vec{u}_i,\ \vec{u}_{i+r},\ \vec{u}_{i+k} \longrightarrow \vec{u}_{i+l},\ \vec{u}_{i+l+r},\ \vec{u}_{i+k} \\ i = 1, 2, \ldots, r\ ;\quad l = 1, 2, \ldots, r\ ; \\ k = 1, 2, \ldots, 2r. \end{cases}$$

Dans une collision de type B, les vitesses avant collision sont deux vitesses opposées et une troisième vitesse quelconque. Après collision on a deux vitesses opposées et la troisième vitesse est inchangée.

Les vitesses avant collision étant données, il y a plusieurs éventualités possibles pour les vitesses après collision. On attache la probabilité β_l^k à l'éventualité d'avoir après collision les vitesses $\vec{u}_{i+l}$, $\vec{u}_{i+l+r}$, $\vec{u}_{i+k}$, les vitesses avant collision étant $\vec{u}_i$, $\vec{u}_{i+r}$, $\vec{u}_{i+k}$. Naturellement on a $\sum_{l=1}^{r} \beta_l^k = 1$ pour tout $k = 1, 2, \ldots, 2r$. En l'absence de la particule de vitesse $\vec{u}_{i+k}$, une collision de type B se réduit à une collision binaire du type envisagé dans E-2.

Collision de type C

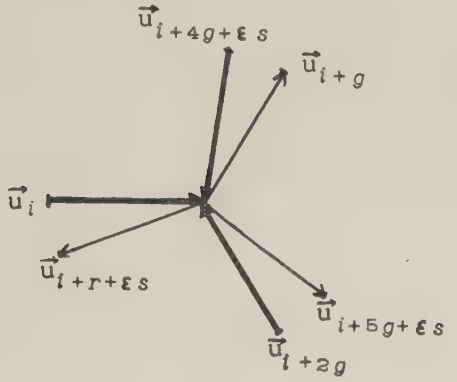


$$\begin{cases} \vec{u}_i,\ \vec{u}_{i+2g},\ \vec{u}_{i+4g} \longrightarrow \vec{u}_{i+l},\ \vec{u}_{i+l+2g},\ \vec{u}_{i+l+4g} \\ i = 1, 2, \ldots, 2g\ ;\quad l = 1, 2, \ldots, 2g. \end{cases}$$

Dans une collision de type C les trois vitesses avant collision forment des angles de $2\pi/3$, et de même les trois vitesses après collision. On attache ici la probabilité γ_l à l'éventualité d'avoir après

collision les vitesses $\vec{u}_{i+l}$, $\vec{u}_{i+l+2g}$, $\vec{u}_{i+l+4g}$, les vitesses avant collision étant $\vec{u}_i$, $\vec{u}_{i+2g}$, $\vec{u}_{i+4g}$. Les γ_l vérifient : $\sum_{l=1}^{2g} \gamma_l = 1$.

Collision de type D_s



$$\begin{cases} \vec{u}_i\ ,\ \vec{u}_{i+2g}\ ,\ \vec{u}_{i+4g+\varepsilon s} \longrightarrow \vec{u}_{i+g}\ ,\ \vec{u}_{i+r+\varepsilon s}\ ,\vec{u}_{i+5g+\varepsilon s} \\ \varepsilon = \pm 1\ ; \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ 2g\ ; \\ s \in E \equiv \{1, \ldots, g-1, g+1, \ldots, 3g-1\} \end{cases}$$

Les collisions de type D_s sont particulières en ce sens que les vitesses après collision sont soit identiques aux vitesses avant collision, soit celles indiquées sur la figure. On suppose que cette dernière éventualité se réalise avec la probabilité $\delta_{\varepsilon s}$. $\delta_{\varepsilon s}$ apparaît comme la probabilité pour que la collision des 3 particules de vitesses $\vec{u}_i$, $\vec{u}_{i+2g}$, $\vec{u}_{i+4g+\varepsilon s}$ soit non triviale.

Enfin on formule l'hypothèse de la collision inverse : si un triplet de particules de vitesses $\vec{u}_i$, $\vec{u}_j$, $\vec{u}_k$ prend les vitesses $\vec{u}_{i'}$, $\vec{u}_{j'}$, $\vec{u}_{k'}$ avec la probabilité φ , alors au cours de la collision inverse, les vitesses $\vec{u}_i$, $\vec{u}_j$, $\vec{u}_k$ sont prises avec la même probabilité φ .

Il résulte que

$$\beta_l^k = \beta_{-l}^{k-l} \ , \quad \gamma_l = \gamma_{-l} \ , \quad \delta_s = \delta_{-s} \tag{51}$$

2 - Equations

Introduisons la constante B (B = 2 c S) telle que $B\,N_{i+r}$ soit la fréquence de collision d'une particule de vitesse $\vec{u}_i$ avec les particules de vitesse $\vec{u}_{i+r}$, et les constantes T_B , T_c , T_s telles que $T_B\ N_{i+r}\ N_{i+k}$, $T_c\ N_{i+2g} N_{i+4g}$, $T_s\ N_{i+2g}\ N_{i+4g+\varepsilon s}$ soient les fréquences de collision relatives aux collisions de type B, C, D_s. Pour les collisions de type B on a plusieurs configurations d'entrée possibles suivant la position de $\vec{u}_{i+k}$ par rapport à $\vec{u}_i$, $\vec{u}_{i+r}$, et on a également plusieurs configurations de sortie ; mais à une configuration d'entrée donnée peut correspondre n'importe laquelle des configurations de sortie pour cette raison on n'introduit qu'un seul coefficient T_B .

Dans une collision ternaire de type B interviennent les vitesses $\vec{u}_i$, $\vec{u}_{i+r}$; cette rencontre entre les particules de vitesses $\vec{u}_i$, $\vec{u}_{i+r}$ a pu être comptée comme collision binaire. Pour éliminer de telles collisions binaires on introduit le coefficient T'_B tel que $T'_B N_{i+r} N_{i+k}$ soit la fréquence de collision ternaire d'une particule de vitesse $\vec{u}_i$ avec les particules de vitesses $\vec{u}_{i+r}$, $\vec{u}_{i+k}$ qui, en l'absence de la particule de vitesse $\vec{u}_{i+k}$ donne lieu à une collision binaire. On a évidemment $T'_B \leqslant T_B$ et on suppose $n T'_B < B$; cette inégalité est réalisée si on admet, ce qui est normal, que la fréquence de collision binaire est bien supérieure à la fréquence de collision ternaire.

Pour écrire les équations décrivant l'évolution du gaz en l'absence de forces extérieures on procède comme dans le paragraphe A-3. L'équation pour N_i s'obtient en écrivant un bilan pour les particules de vitesse $\vec{u}_i$. Sachant que l'hypothèse de la collision inverse n'est pas utilisée ni pour les collisions binaires ni pour les collisions ternaires cette équation s'écrit :

$$(52)\quad \frac{\partial N_i}{\partial t} + \vec{u}_i \cdot \vec{\nabla} N_i = \alpha^i_B - \alpha^i_{T'} + \alpha^i_T$$

$$= B \sum_{l=1}^{r} (\alpha_{-l} N_{i+l} N_{i+l+r} - \alpha_l N_i N_{i+r})$$

$$- T'_B \sum_{k=1}^{2r} \sum_{l=1}^{r} (\alpha_{-l} N_{i+l} N_{i+l+r} N_{i+k} - \alpha_l N_i N_{i+r} N_{i+k})$$

$$+ T_B \sum_{k=1}^{2r} \sum_{l=1}^{r} (\beta^{k-l}_{-l} N_{i+l} N_{i+l+r} N_{i+k} - \beta^k_l N_i N_{i+r} N_{i+k})$$

$$+ T_C \sum_{l=1}^{2g} (\gamma_{-l} N_{i+l} N_{i+l+2g} N_{i+l+4g} - \gamma_l N_i N_{i+2g} N_{i+4g})$$

$$+ \sum_{s \in E} T_s \sum_{j \in E_i} (\psi(E^1_i) - \psi(E^2_i)) (\delta_{-s} N_{j+g} N_{j+r+s} N_{j+5g+s} - \delta_s N_j N_{j+2g} N_{j+4g+s})$$

avec :

$$\begin{cases} E^1_i = \{i,\ i+4g,\ i+2g-s\}, \quad E^2_i = \{i+5g,\ i+r-s,\ i+g-s\} \\ E_i = E^1_i \cup E^2_i \\ \psi(E^\alpha_i) \quad \text{fonction caractéristique de } E^\alpha_i, \quad \alpha = 1, 2. \end{cases}$$

Le premier terme α^i_B est le terme relatif aux collisions binaires : il apparaîtrait seul si on négligeait les collisions ternaires. Le second terme $\alpha^i_{T'}$

précédé du signe moins tient compte des rencontres entre deux particules qui ont pu être comptées comme collisions binaires et comme collisions ternaires. a_T^i est le terme relatif aux collisions ternaires de type B, C et D_S et il apparaîtrait seul s'il n'y avait pas de collisions binaires.

Comme dans le paragraphe B - 2 on peut écrire une équation de transport pour une grandeur macroscopique $\overline{\varphi}$; on multiplie l'équation (52) pour N_i par φ_i et on somme sur tous les i . Les calculs que l'on ne reproduit pas ici sont du même genre que ceux faits dans le paragraphe A - 4 ; ils ne présentent pas de difficultés mais nécessitent beaucoup d'attention quant aux ensembles décrits par les indices. Le résultat est le suivant :

$$(53)\quad \frac{\partial}{\partial t}(n\overline{\varphi}) + \vec{\nabla}.(n\,\overline{\varphi\vec{u}}) - n\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial t}} - n\,\overline{\vec{u}.\vec{\nabla}\varphi} =$$

$$= \sum_{i=1}^{2r}\Big\{\frac{1}{4}\,B\sum_{l=1}^{r}(\varphi_i + \varphi_{i+r} - \varphi_{i+l} - \varphi_{i+l+r})(\alpha_{-l}\,N_{i+l}\,N_{i+l+r} - \alpha_l\,N_i\,N_{i+r})$$

$$- \frac{1}{4}\,T'_B\,(\sum_{k=1}^{2r} N_k)\sum_{l=1}^{r}(\varphi_i + \varphi_{i+r} - \varphi_{i+l} - \varphi_{i+l+r})(\alpha_{-l}\,N_{i+l}\,N_{i+l+r} - \alpha_l\,N_i\,N_{i+r})$$

$$+ \frac{1}{4}\,T_B\sum_{k=1}^{2r}\sum_{l=1}^{r}(\varphi_i + \varphi_{i+r} + \varphi_{i+k} - \varphi_{i+l} - \varphi_{i+l+r} - \varphi_{i+k})(\beta_{-l}^{k-l}\,N_{i+l}\,N_{i+l+r}\,N_{i+k} - \beta_l^k\,N_i\,N_{i+r}\,N_{i+k})$$

$$+ \frac{1}{6}\,T_C\sum_{l=1}^{2g}(\varphi_i + \varphi_{i+2g} + \varphi_{i+4g} - \varphi_{i+l} - \varphi_{i+l+2g} - \varphi_{i+l+4g})(\gamma_{-l}\,N_{i+l}\,N_{i+l+2g}\,N_{i+l+4g} - \gamma_l\,N_i\,N_{i+2g}\,N_{i+4g})$$

$$+ \sum_{s\in E} T_S(\varphi_i + \varphi_{i+2g} + \varphi_{i+4g+s} - \varphi_{i+g} - \varphi_{i+r+s} - \varphi_{i+5g+s})(\delta_{-s}\,N_{i+g}\,N_{i+r+s}\,N_{i+5g+s} - \delta_s\,N_i\,N_{i+2g}\,N_{i+4g+s})\Big\}.$$

A l'intérieur des parenthèses on reconnaît dans les indices les termes relatifs aux vitesses avant collision et les termes relatifs aux vitesses après collision. Il est évident que l'on peut déduire de (53) les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

3 - Théorème H

Désormais on suppose vérifiée l'hypothèse de la collision inverse pour les collisions binaires (paragraphe E-2) et pour les collisions ternaires (51). Pour un gaz spatialement homogène l'évolution au cours du temps de la fonction H de Boltzmann s'obtient par un raisonnement analogue à celui du paragraphe D-1. On peut écrire

$$\frac{dH}{dt} = \left(\frac{dH}{dt}\right)_B - \left(\frac{dH}{dt}\right)_{T'} + \left(\frac{dH}{dt}\right)_T \quad . \tag{54}$$

Le second membre de cette équation est en fait identique au second membre de l'équation de transport (53) écrite ci-dessus dans lequel on aurait remplacer φ_i par $\text{Log } N_i$. Il n'apparaît donc au second membre de (54) que des termes de la forme $\text{Log } \frac{x}{y} . (y - x)$ lesquels sont négatifs.

Les trois termes $\left(\frac{dH}{dt}\right)_B$, $\left(\frac{dH}{dt}\right)_{T'}$ et $\left(\frac{dH}{dt}\right)_T$ correspondent respectivement au premier, au second et aux trois derniers ensembles de termes figurant dans le second membre de (53). Les trois termes $\left(\frac{dH}{dt}\right)_B$, $\left(\frac{dH}{dt}\right)_{T'}$, $\left(\frac{dH}{dt}\right)_T$ sont négatifs.

Le premier seul subsiste lorsqu'on néglige les collisions ternaires : cela redonne le théorème H pour les collisions binaires. L'introduction des collisions ternaires donne lieu à deux termes agissant en sens opposés sur la variation de H; $\left(\frac{dH}{dt}\right)_T$ dû aux collisions ternaires seules, est négatif ; $-\left(\frac{dH}{dt}\right)_{T'}$ est positif, mais la différence $\left(\frac{dH}{dt}\right)_B - \left(\frac{dH}{dt}\right)_{T'}$ est négative car $n T'_B < B$. Ainsi H est décroissante et le théorème H est établi pour les collisions ternaires.

Remarque 1. Le terme positif $-\left(\frac{dH}{dt}\right)_{T'}$ est ici compensé par le terme provenant des collisions binaires seules. Considéré comme fonction des N_i positifs ce terme n'est pas en général compensé par le terme dû aux collisions ternaires de type B seules ; il l'est cependant si les α_l et les β_l^k sont indépendants de l et k car alors $\alpha_l = \beta_l^k = \frac{1}{r}$. On a :

$$\left(\frac{dH}{dt}\right)_{\substack{\text{coll. tern.} \\ \text{de type B}}} - \left(\frac{dH}{dt}\right)_{T'} = \sum_{i=1}^{2r} \sum_{l=1}^{r} \frac{1}{4} \left(T_B \sum_{k=1}^{2r} \beta_l^k N_{i+k} - T'_B \sum_{k=1}^{2r} \alpha_l N_k\right)$$

$$. \text{Log } \frac{N_{i+l} \; N_{i+l+r}}{N_i \; N_{i+r}} \quad (N_i \; N_{i+r} - N_{i+l} \; N_{i+l+r})$$

$$= \frac{n}{4r} (T_B - T'_B) \sum_{i=1}^{2r} \sum_{l=1}^{r} \text{Log } \frac{N_{i+l} \; N_{i+l+r}}{N_i \; N_{i+r}} (N_i \; N_{i+r} -$$

$$- N_{i+l} \; N_{i+l+r}) .$$

Cette dernière expression est bien négative car $T'_B \leqslant T_B$. Ceci est conforme au résultat établi par Harris [28], résultat que nous retrouvons en donnant à p, α_l, β_l^k, γ_l et δ_s les valeurs 3, 1/3, 1/3, 1/2 et 0. $\delta_s = 0$ correspond au fait que Harris n'a pas introduit les collisions ternaires de type D_s.

Remarque 2. En tant que fonction des N_i le terme dû aux collisions ternaires de type B seules peut être positif si l'hypothèse de la collision inverse relative à ces collisions est abandonnée. En effet avec $r = 3$ et en prenant les probabilités β_l^k tels que $\beta_l^k = \beta_l^{k'}$ si $k \equiv k'$ modulo 3, on a :

$$\left(\frac{dH}{dt}\right)_{\substack{\text{coll. tern.}\\ \text{de type B}}} = \frac{1}{4}\, T_B \sum_{i=1}^{6}\sum_{k=1}^{6}\sum_{l=1}^{3} (\beta_{-l}^{k-l} N_{i+l} N_{i+l+3} - \beta_l^k N_i N_{i+3}) N_{i+k} \operatorname{Log} \frac{N_{i+l} N_{i+l+3}}{N_i N_{i+3}}$$

$$= 2\, T_B \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{2} (\beta_{-l}^{k-l} N_{i+l} N_{i+l+3} - \beta_l^k N_i N_{i+3})$$

$$(N_{i+k} + N_{i+k+3}) \operatorname{Log} N_i N_{i+3} .$$

En prenant $\beta_1^3 = \beta_2^3$, $\beta_1^1 = \beta_2^2 = \beta_1^2 = \beta_2^1 = 0$, $N_1 = N_2 = N_4 = N_5 = 1$ et $N_3 = 2N_6$ il vient :

$$\left(\frac{dH}{dt}\right)_{\substack{\text{coll. tern.}\\ \text{de type B}}} = 8\, T_B \beta_2^3 \operatorname{Log} 2N_6^2 \cdot (1 - 3N_6^3) .$$

Cette dernière expression n'a pas un signe constant. L'hypothèse de la collision inverse n'est pas satisfaite car par exemple $\beta_1^3 \neq \beta_1^2$.

Sengers [41] considère un choc ternaire de trois sphères élastiques comme une succession rapprochée de plusieurs chocs binaires. Pour le modèle ci-dessus, lors de la résolution de (49) cela reviendrait à ne retenir que les collisions ternaires de type B.

On peut certainement élaborer une théorie des collisions ternaires analogue à la théorie des collisions binaires des paragraphes A-1 et A-2 pour un modèle général de gaz à répartition discrète de vitesses.

CHAPITRE II

SUR LES SOLUTIONS DES EQUATIONS CINETIQUES.

Ce chapitre comprend trois parties.

Dans la première on s'intéresse au système des équations cinétiques pour de faibles nombres de Knudsen ; l'application de la méthode de Chapman-Enskog permet d'obtenir des lois de comportement pour le milieu rendant ainsi fermé le système des équations de conservation ; ce système suivant l'ordre d'approximation considéré s'apparente aux systèmes d'équations d'Euler, de Navier-Stokes, de Burnett ...

On se donne dans la seconde partie un état microscopique dont les densités N_i vérifient $0 < \mu < N_i < M$ pour tout i ; on met en évidence des bornes inférieure et supérieure pour les densités $N_i^{(0)}$ de l'état maxwellien associé, et on donne une estimation pour la différence $N_i - N_i^{(0)}$.

Le problème de Cauchy pour le système d'équations cinétiques modifiées introduit dans la troisième partie admet une solution unique. Pour un modèle particulier on détermine avec quelle approximation la solution hydrodynamique associée(état maxwellien associé) vérifie les équations de conservation.

1ère partie

SOLUTION DES EQUATIONS CINETIQUES POUR DE FAIBLES NOMBRES DE KNUDSEN

A - OPERATEUR DE COLLISION LINEARISE

Dans l'écriture du système d'équations (I - 13) régissant l'évolution d'un gaz à répartition discrète de vitesses on a groupé les termes provenant des collisions dans $\mathcal{F}(N, N)$. On rappelle que $\mathcal{F}(U, V)$ est un opérateur bilinéaire symétrique de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$ (I - 12) et que par ailleurs $\mathcal{F}(N, N) = 0$ si et seulement si les densités N sont celles d'un état maxwellien (I - 35). Naturellement on va linéariser $\mathcal{F}(N, N)$ au voisinage d'un état maxwellien mettant ainsi en évidence une matrice $\mathbb{L}$ carré d'ordre p : on appellera $\mathbb{L}$ opérateur de collision linéarisé.

1 - Obtention de l'opérateur de collision linéarisé

En théorie cinétique classique lorsqu'on linéarise le terme provenant des collisions dans l'équation de Boltzmann, on le fait en posant pour la fonction de distribution f, $f = f_M (1+\Phi)$ [23], f_M étant une fonction de distribution maxwellienne et Φ une fonction petite devant 1. C'est en procédant de manière analogue que l'opérateur de collision linéarisé que l'on introduit est le plus élégant.

Soit donc un état maxwellien dont les densités sont $N = (N_1, N_2, \ldots, N_p)$. Soit $\mathbb{A}$ une matrice diagonale d'ordre p dont l'élément non nul de la $i^{ème}$ ligne est N_i . On envisage la perturbation $\mathbb{A}X$, $X = (X_1, X_2, \ldots, X_p)$ au voisinage de N, autrement dit on pose $U = V = N + \mathbb{A}X$ et il vient :

$$\mathcal{F}(U, V) = \mathcal{F}(N, N) + \mathcal{F}(N, \mathbb{A}X) + \mathcal{F}(\mathbb{A}X, N) + \mathcal{F}(\mathbb{A}X, \mathbb{A}X)$$

Le premier terme est nul, les deux suivants sont linéaires en X et conduisent à la définition de $\mathbb{I}$:

$$(1) \qquad \mathbb{I}X = \mathcal{F}(N, \mathbb{A}X) + \mathcal{F}(\mathbb{A}X, N) = 2\mathcal{F}(N, \mathbb{A}X)$$

d'après (I - 12) la $i^{ème}$ composante de $\mathbb{I}X$ s'écrit :

$$(2) \qquad (\mathbb{I}X)_i = \frac{1}{2} \sum_{j,k,l} \left[A^{ij}_{kl} N_k N_l (X_k + X_l) - A^{kl}_{ij} N_i N_j (X_i + X_j) \right].$$

L'élément de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne de $\mathbb{I}$ est par suite

$$(3) \qquad I_{ij} = \frac{1}{2} \left[2 \sum_{k,l} A^{ik}_{jl} N_j N_l - \sum_{k,l} A^{kl}_{ij} N_l N_j - \sum_{k,l,m} A^{kl}_{im} N_i N_m \delta_{ij} \right]$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

2 - Propriétés de l'opérateur de collision linéarisé

L'opérateur de collision linéarisé $\mathbb{I}$ est tel que

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha) & (\mathbb{I}X, X) \leqslant 0 \qquad \forall X \in \mathbb{R}^p \\ \beta) & 0 \text{ est valeur propre de } \mathbb{I} \text{ et l'espace propre associé est } \mathbb{F}. \\ \gamma) & (\mathbb{I}X, \Phi) = 0 \qquad \forall \Phi \in \mathbb{F}, \quad \forall X \in \mathbb{R}^p \\ \delta) & \text{Si l'hypothèse I est vérifiée alors la matrice } \mathbb{I} \text{ est symétrique.} \end{cases}$$

En théorie cinétique classique l'opérateur de collision linéarisé possède des propriétés analogues [23]. $\delta)$ est une conséquence immédiate de l'expression (3) pour I_{ij}. La propriété $\gamma)$ résulte de la définition (1) de $\mathbb{I}X$ et des propriétés des invariants des rencontres (I - 25).

Pour établir $\alpha)$ et $\beta)$ on explicite $(\mathbb{I}X, X)$:

$$(\mathbb{I}X, X) = (2\mathcal{F}(N, \mathbb{A}X), X)$$

$$= \frac{1}{8} \sum_{i,j,k,l} (X_i + X_j - X_k - X_l) \{ A^{ij}_{kl} N_k N_l (X_k + X_l) - A^{kl}_{ij} N_i N_j (X_i + X_j) \}$$

d'après (15 c). Ceci peut se mettre sous la forme suivante :

$$(\mathbb{I}X, X) = \frac{1}{8}\Big\{ \sum_{i,j,k,l} (X_i + X_j - X_k - X_l)(X_k + X_l)\ A_{kl}^{ij}\ N_k\ N_l$$

$$- \sum_{i,j,k,l} (X_i + X_j)^2\ A_{ij}^{kl} N_i\ N_j + \sum_{i,j,k,l} (X_k + X_l)(X_i + X_j)\ A_{ij}^{kl} N_i\ N_j \Big\}.$$

Dans le dernier terme on échange les deux couples (i,j) et (k,l); ensuite dans les premier et dernier termes on remplace d'après (I - 35) $A_{kl}^{ij} N_k\ N_l$ par $A_{kl}^{ij} N_i\ N_j$ puisque les N_i sont les densités d'un état maxwellien. Dans le second terme on peut d'abord sommer en k et l et l'utilisation des hypothèses I ou II, (I - 8) ou (I - 9), permet de remplacer $\sum_{k,l} A_{ij}^{kl}$ par $\sum_{k,l} A_{kl}^{ij}$. On arrive à :

$$(\mathbb{I}X, X) = \frac{1}{8}\Big\{ \sum_{i,j,k,l} (X_i + X_j - X_k - X_l)(X_k + X_l)\ A_{kl}^{ij} N_i\ N_j$$

$$- \sum_{i,j,k,l} (X_i + X_j)^2\ A_{kl}^{ij} N_i\ N_j + \sum_{i,j,k,l} (X_k + X_l)(X_i + X_j)\ A_{kl}^{ij} N_i\ N_j \Big\}$$

$$(5)\quad (\mathbb{I}X, X) = -\frac{1}{8} \sum_{i,j,k,l} (X_i + X_j - X_k - X_l)^2\ A_{kl}^{ij}\ N_i\ N_j$$

α) est une conséquence directe de (5).

Si X vérifie $\mathbb{I}X = 0$ on a $(\mathbb{I}X, X) = 0$; alors d'après l'expression (5) les vecteurs X solutions de $\mathbb{I}X = 0$ vérifient

$$A_{ij}^{kl}\ (X_i + X_j - X_k - X_l) = 0 \quad \text{pour tout } i, j, k, l \text{ et sont donc}$$

(voir I - 23) dans $\mathbb{F}$. Réciproquement soit X dans $\mathbb{F}$ on a :

$$A_{kl}^{ij} N_k\ N_l (X_k + X_l) = A_{kl}^{ij} N_k\ N_l\ (X_i + X_j) = A_{kl}^{ij} N_i\ N_j\ (X_i + X_j)$$

la dernière égalité résultant de (I - 35). L'expression (2) devient

$$(\mathbb{I}X)_i = \frac{1}{2} \sum_{j,k,l} (A_{kl}^{ij} - A_{ij}^{kl})\ N_i\ N_j\ (X_i + X_j)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j} N_i\ N_j\ (X_i + X_j) \sum_{k,l} (A_{kl}^{ij} - A_{ij}^{kl}) = 0$$

en vertu des hypothèses I ou II, (I - 8) ou (I - 9). β) est démontré.

Remarque 1. Les éléments de la diagonale de $\mathbb{I}$ sont négatifs ou nuls.

Ceci résulte immédiatement de la propriété α) ci-dessus en prenant un X convenable, avec $X = (1, 0, 0, \ldots, 0)$ on obtient $I_{11} \leqslant 0$. On peut aussi expliciter I_{ii}. D'après (3)

$$I_{ii} = \frac{1}{2}\Big\{ 2 \sum_{k,l} A_{il}^{ik} N_i N_l - \sum_{k,l} A_{ii}^{kl} N_i N_i - \sum_{k,l,m} A_{im}^{kl} N_i N_m \Big\} .$$

On a :

$$\sum_{k,l,m} A_{im}^{kl} N_m = 2 \sum_{m} \Big(\sum_{\substack{(k,l) \in (\overline{i,m}) \\ k \neq l}} A_{im}^{kl} N_m \Big) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} \Big(\sum_{m} A_{im}^{kk} N_m \Big) + \sum_{m} A_{im}^{ii} N_m .$$

On utilise les propriétés (I - 6) et (I - 7) des probabilités de transition et I_{ii} s'écrit :

$$I_{ii} = \sum_{l} A_{il}^{il} N_i N_l - \frac{1}{2} A_{ii}^{ii} N_i N_i - \sum_{m} \sum_{\substack{(k,l) \in (\overline{i,m}) \\ k \neq l}} A_{im}^{kl} N_i N_m - \frac{1}{2} A_{ii}^{ii} N_i N_i$$

$$I_{ii} = \sum_{m} \Big\{ A_{im}^{im} N_i N_m - \sum_{\substack{(k,l) \in (\overline{i,m}) \\ k \neq l}} A_{im}^{kl} N_i N_m \Big\} - A_{ii}^{ii} N_i N_i .$$

Dans la sommation en m on isole le terme correspondant à $m = i$ lequel est simplement $A_{ii}^{ii} N_i N_i$ d'où :

$$I_{ii} = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^{p} \Big\{ A_{im}^{im} N_i N_m - \sum_{\substack{(k,l) \in (\overline{i,m}) \\ k \neq l}} A_{im}^{kl} N_i N_m \Big\} .$$

Comme $m \neq i$ il est inutile d'écrire $k \neq l$ pour les couples (k,l) de $(\overline{i,m})$

$$(6) \qquad I_{ii} = - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^{p} \Big\{ \sum_{\substack{(k,l) \in (\overline{i,m}) \\ (k,l) \neq (i,m)}} A_{im}^{kl} \Big\} N_i N_m \leqslant 0 .$$

Si la classe d'équivalence $\bar{i}$ est réduite au seul élément $\vec{u}_i$ alors $I_{ii} = 0$; le vecteur dont seule la $i^{ème}$ composante est non nulle est vecteur propre de $\mathbb{I}$.

Si $\bar{i}$ contient plusieurs vecteurs vitesses alors I_{ii} est non nul si on affecte des probabilités de transition strictement positives aux collisions non triviales.

Remarque 2. La matrice $\mathbb{I}$ peut n'être pas symétrique lorsque l'hypothèse I de la microréversibilité n'est pas satisfaite.

Soit l'exemple du modèle plan régulier à 2r vitesses de même module (I - § E-2) pour lequel on suppose les r coefficients α_l tous non nuls. L'espace $\mathbb{F}$ des invariants des rencontres est de dimension $r+1$ et est constitué des solutions du système

$$\varphi_i + \varphi_{i+r} = \varphi_1 + \varphi_{1+r} \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, r$$

Les densités dans un état maxwellien sont telles que $\text{Log } N \in \mathbf{F}$ (I-35) c'est à dire $N_i \, N_{i+r} = N_1 \, N_{1+r} \quad \forall i = 1, 2, \ldots, r$. En linéarisant le second membre de (I-43) au voisinage d'un état maxwellien on arrive à :

$$(\mathbb{I}\, X)_i = 2 c S \sum_{l=1}^{r} \left\{ \alpha_{-l} \, N_{i+l} \, N_{i+l+r} (X_{i+l} + X_{i+l+r}) - \alpha_l \, N_i \, N_{i+r} (X_i + X_{i+r}) \right\}$$

$$(\mathbb{I}\, X)_i = 2 c S \, N_1 \, N_{1+r} \sum_{l=1}^{r} \left\{ \alpha_{-l} (X_{i+l} + X_{i+l+r}) - \alpha_l (X_i + X_{i+r}) \right\}$$

Donc $I_{ij} = 2 c S \, N_1 \, N_{1+r} \, (\alpha_{i-j} - (\sum_{l=1}^{r} \alpha_l) \, \delta_{ij}) = 2 c S \, N_1 N_{1+r} (\alpha_{i-j} - \delta_{ij})$.

Dans le cas de ce modèle la matrice $\mathbb{I}$ est symétrique si et seulement si l'hypothèse de la collision inverse (identique à l'hypothèse de la microréversibilité) est satisfaite.

Proposition. Soient N_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, les densités dans un état maxwellien et soit $\mathbb{A}$ la matrice carrée d'ordre p diagonale dont l'élément non nul de la $i^{\text{ème}}$ ligne est N_i. Si $X \in \mathbf{F}$ et $\mathbb{A} X \in \mathbf{F}^{\perp}$ alors $\mathbb{A} X = X = 0$.

Comme $X \in \mathbf{F}$ et $\mathbb{A} X \in \mathbf{F}^{\perp}$ il existe des constantes λ_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, q$ et des constantes μ_β, $\beta = q+1, \ldots, p$ telles que

$$X = \sum_{\alpha=1}^{q} \lambda_\alpha \, V_\alpha \qquad , \qquad \mathbb{A} X = \sum_{\beta=q+1}^{p} \mu_\beta \, W_\beta \, .$$

Donc telles que

$$\mathbb{A} \left(\sum_{\alpha=1}^{q} \lambda_\alpha \, V_\alpha \right) = \sum_{\beta=q+1}^{p} \mu_\beta \, W_\beta$$

Multiplions cette dernière équation scalairement par $V_1, V_2, \ldots, V_q, W_{q+1}, \ldots, W_p$.

$$\sum_{\alpha=1}^{q} \lambda_\alpha \left(\sum_{i=1}^{p} N_i \, V_{\alpha i} \, V_{\beta i} \right) = 0 \qquad \beta = 1, 2, \ldots, q$$

$$\sum_{\alpha=1}^{q} \lambda_\alpha \left(\sum_{i=1}^{p} N_i \, V_{\alpha i} \, W_{\beta i} \right) = \mu_\beta \qquad \beta = q+1, \ldots, p$$

Il y a découplage : les q premières équations donnent les λ_α et les p - q suivantes donnent les μ_β en fonction des λ_α .

Le déterminant du système des q premières équations pour les inconnues λ_α est en fait le déterminant (I-40). Il est non nul. Le système est de Cramer et on a pour solution unique :

$$\lambda_\alpha = \mu_\beta = 0 \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, q \text{ et } \beta = q+1, \ldots, p.$$

La proposition est démontrée.

Corollaire. Si $\mathbf{A}X \in \mathbf{F}^\perp$ et $\mathbf{I}X = 0$ alors $X = 0$.

D'après (4) $\mathbf{I}X = 0$ implique et réciproquement $X \in \mathbf{F}$. Le résultat s'en déduit.

B - APPLICATION DE LA METHODE DE CHAPMAN-ENSKOG

1 - Application de la méthode de Chapman - Enskog

La méthode de Chapman - Enskog permet d'établir un lien entre la théorie cinétique et la dymanique des gaz [22], [26].

Toutes les propriétés du système d'équations décrivant l'évolution du gaz à répartition discrète de vitesses rappellent des propriétés analogues de l'équation de Boltzmann. On applique à ce système la méthode de Chapman - Enskog. On procède comme Grad [23]. On insère un petit paramètre ϵ dans le système (I-13) et on postule certains développements en puissance de ϵ pour N et pour les dérivées par rapport au temps des variables d'état macroscopique a_i .

Introduction du paramètre ϵ.

Soit un gaz dans lequel toutes les densités N_i sont égales : $N_i = \frac{1}{p} n_o$ pour tout $i = 1, \ldots, p$. n_o est la densité totale. La fréquence de collision d'une particule de vitesse $\vec{u}_{i_o}$ fixée est d'après (I - § A-2) :

$$\sum_j \sum_{(k,l)} A_{i_o j}^{k l} N_j = \frac{n_o}{p} \sum_j \sum_{(k,l)} A_{i_o j}^{k l} \quad .$$

On peut définir la fréquence de collision pour une particule quelconque par :

$$(7) \qquad \nu_o = \frac{n_o}{p^2} \sum_{i,j} \sum_{(k,l)} A_{i\,j}^{k l} \quad .$$

On introduit une vitesse moléculaire caractéristique w_o de la manière suivante

$$(8) \qquad w_o = \frac{1}{p} \sum_i |\vec{u}_i|$$

Le libre parcours moyen pour le gaz envisagé a naturellement l'expression :

$$(9) \qquad \lambda = \frac{w_o}{\nu_o} = \frac{p}{n_o} \frac{\sum_i |\vec{u}_i|}{\sum_{i,j} \sum_{(k,l)} A_{i\,j}^{k l}} \quad .$$

Dans un problème physique où apparaît une longueur macroscopique de référence L il est très important d'écrire les équations cinétiques (I-11) en variables sans dimensions. Ces dernières sont surmontées d'une barre ; par exemple comme dans [7] :

$$\vec{r} = L \bar{\vec{r}} \quad , \quad t = \frac{L}{w_o} \bar{t} \quad , \quad N_i = \frac{n_o}{p} \bar{N}_i \quad , \quad \vec{u}_i = w_o \bar{\vec{u}}_i$$

$$A_{i\,j}^{k l} = \frac{1}{p} \left(\sum_{i,j} \sum_{(k,l)} A_{i\,j}^{k l} \right) \bar{A}_{i\,j}^{k l}$$

il vient :

$$\frac{\partial \bar{N}_i}{\partial \bar{t}} + \bar{\vec{u}}_i \cdot \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial \bar{\vec{r}}} = \frac{L}{\lambda} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j,k,l} \left(\bar{A}_{k\,l}^{i\,j} \bar{N}_k \bar{N}_l - \bar{A}_{i\,j}^{k\,l} \bar{N}_l \bar{N}_j \right) \right\}$$

Le nombre sans dimension $\frac{\lambda}{L}$ est le nombre de Knudsen, soit ϵ.

Méthode de Chapman Enskog : formalisme.

Conformément à ce qui précède écrivons le système (I-13) des équations cinétiques sous la forme

$$(10) \qquad \frac{\partial N}{\partial t} + \mathcal{A} N = \frac{1}{\epsilon} \mathcal{F}(N, N)$$

ϵ étant un petit paramètre.

Notation. Pour exposer la méthode on désignera par a l'une des variables d'état macroscopique et par D une dérivée spatiale.

On postule :

$$(11)\qquad \begin{cases} N = N(a, Da ; \epsilon) \\ \quad = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n N^{(n)} \qquad \text{avec} \qquad N^{(n)} = N^{(n)}(a, Da) \end{cases}$$

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a_j}{\partial t} = F_j(a, Da ; \epsilon) \qquad\qquad j = 1, 2, \ldots, q. \\ \quad = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n F_j^{(n)} \qquad \text{avec} \qquad F_j^{(n)} = F_j^{(n)}(a, Da) \end{cases}$$

$N^{(n)}$ et $F_j^{(n)}$ ne dépendent de t et de $\vec{r}$ que par l'intermédiaire des quantités a et de leurs dérivées spatiales Da. On porte (11) et (12) dans (10) et on annule les coefficients des différentes puissances de ϵ :

$$(13)\qquad \mathcal{F}(N^{(0)}, N^{(0)}) = 0$$

$$(14)\qquad \begin{cases} 2\,\mathcal{F}(N^{(0)}, N^{(n)}) = -\sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{F}(N^{(k)}, N^{(n-k)}) \\ \qquad\qquad + \sum_{r+s=n-1} \left(\dfrac{\partial N^{(r)}}{\partial a} F^{(s)} + \dfrac{\partial N^{(r)}}{\partial (Da)} D F^{(s)}\right) + \mathcal{A} N^{(n-1)} \\ n \geqslant 1 \end{cases}$$

Dans la parenthèse du second membre de (14) il y a autant de termes que d'arguments dont dépend $N^{(r)}$.

L'équation pour $N^{(0)}$ est particulière mais les suivantes, $(n \geqslant 1)$ sont toutes de même type ; $N^{(n)}$ est solution d'une équation linéaire avec second membre, l'opérateur du premier membre étant singulier, si on suppose les $N^{(r)}$ avec $0 \leqslant r \leqslant n-1$ connues.

Les quantités a_i étant les variables d'état macroscopique réelles du gaz on pose pour tout t et tout $\vec{r}$ par analogie avec la théorie cinétique classique [23] :

$$(15)\qquad a_i = (N^{(0)}, V_i) \quad , \quad (N^{(n)}, V_i) = 0 \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1$$

ce qui revient à dire que les grandeurs macroscopiques réelles du gaz sont données par l'approximation d'ordre 0.

Résolution

$N^{(0)}$ vérifie (13) ; ceci signifie d'après (I-35) que les $N_i^{(0)}$ sont les densités d'un état maxwellien en tout point $\vec{r}$ et à tout instant t. Autrement dit les $N_i^{(0)}$ sont les densités d'un gaz dans un état localement maxwellien (I - § D-2) à savoir l'état localement maxwellien unique associé aux grandeurs macroscopiques réelles du gaz, a_i , $i = 1, \ldots, q$; en vertu de la conclusion de (I - § D-2)

$$N^{(0)} = \sum_{i=1}^{q} a_i V_i + \sum_{j=q+1}^{p} b_j^{(0)} W_j \tag{16}$$

Les $b_j^{(0)}$ sont des fonctions bien déterminées des a_i.

Pour $n \geq 1$ on pose $N^{(n)} = \mathbb{A}^{(0)} X^{(n)}$ où $\mathbb{A}^{(0)}$ est la matrice construite à partir du $N^{(0)}$ précédent comme dans (§ A-1); on fait ainsi apparaître au premier membre de (14) l'opérateur de collision linéarisé étudié dans le paragraphe A. D'après les propriétés (4) de $\mathbb{I}$ cette équation pour $X^{(n)}$ est soluble si et seulement si son second membre est orthogonal à l'espace $\mathbf{F}$ des invariants des rencontres, c'est à dire à V_i pour $i = 1, 2, \ldots, q$.

Mais $\mathcal{J}(N^{(r)}, N^{(n-k)})$ est orthogonal à V_i d'après (I-25),

$(\frac{\partial N^{(r)}}{\partial a} F^{(s)}, V_i) = F^{(s)} \frac{\partial}{\partial a} (N^{(r)}, V_i) = 0$ pour $r \geq 1$ d'après (15),

de même $(\frac{\partial N^{(r)}}{\partial (Da)} D F^{(s)}, V_i) = D F^{(s)} \frac{\partial}{\partial (Da)} (N^{(r)}, V_i) = 0$ pour $r \geq 1$.

$N^{(0)}$ ayant l'expression (16) est une fonction de a mais pas de Da, donc $\frac{\partial N^{(0)}}{\partial (Da)} = 0$. On a $\frac{\partial N^{(0)}}{\partial a_j} = V_j + \sum_{\beta=q+1}^{p} \frac{\partial b_\beta^{(0)}}{\partial a_j} W_\beta$ donc $(\frac{\partial N^{(0)}}{\partial a_j} F_j^{(s)}, V_i) = \delta_{ij} F_j^{(s)}$. En se servant de ces divers résultats la condition d'orthogonalité cherchée s'écrit :

$$F_i^{(n-1)} + (\mathcal{A} N^{(n-1)}, V_i) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, q. \tag{17}$$

La solution de (14) s'obtient alors comme somme d'une solution particulière de (14) et d'un invariant des rencontres quelconque Φ ; Φ est ensuite déterminé de manière unique par les conditions (15). En effet $h^{(n)}$ étant une solution particulière de (14) on a :

$$X^{(n)} = h^{(n)} + \Phi \qquad N^{(n)} = \mathbb{A}^{(0)} h^{(n)} + \mathbf{A}^{(0)} \Phi$$

On pose $\Phi = \sum_{\alpha=1}^{q} \lambda_\alpha V_\alpha$ et on trouve Φ en résolvant (15) c'est à dire

$$(\mathbb{A}^{(0)} \Phi, V_i) = -(\mathbb{A}^{(0)} h^{(n)}, V_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, q$$

ou

$$\sum_{\alpha=1}^{q} \lambda_\alpha \left(\sum_{j=1}^{p} N_j V_{\alpha j} V_{ij} \right) = -(\mathbb{A}^{(0)} h^{(n)}, V_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, q$$

Ce système de q équations à q inconnues est de Cramer, son déterminant est en fait le déterminant (I-40) et il est non nul.

On peut vérifier en faisant un raisonnement par récurrence que $N^{(n)}$ est une fonction des a_i et de leurs dérivées spatiales jusqu'à l'ordre $n-1$.

En résumé si on connaît les $N^{(r)}$ pour $0 \leqslant r \leqslant n-1$, et les $F_i^{(r)}$ pour $0 \leqslant r \leqslant n-1$, $F_i^{(r)}$ étant obtenu en écrivant les conditions de compatibilité de l'équation (14) pour $N^{(r+1)}$, $N^{(n)}$ est ensuite déterminé de manière unique. Au point de vue théorique ces résultats sont analogues aux résultats de la théorie cinétique classique. Si on considère que l'état macroscopique du gaz est bien déterminé lorsqu'on connaît les a_i, la méthode de Chapman Enskog qui donne N en fonction des a_i c'est à dire les b_j en fonction des a_i, exhibe donc des lois de comportement du milieu rendant ainsi fermé le système (I-30) des équations de conservation pour les a_i.

Supposons que l'on arrête le calcul à l'ordre n en déterminant comme il a été expliqué $N^{(0)}, \ldots, N^{(n)}$. En écrivant naturellement

$$N^{(0)} = \sum_{i=1}^{q} a_i V_i + \sum_{j=q+1}^{p} b_j^{(0)} W_j$$

$$N^{(r)} = \sum_{j=q+1}^{p} b_j^{(r)} W_j \qquad r \geqslant 1 \tag{18}$$

il revient au même de dire que l'on a déterminé $b_j^{(r)}$ pour $j = q+1, \ldots, p$, $r = 0, \ldots, n$. Les $b_j^{(r)}$ sont donc des fonctions connues des a_i et de leurs dérivées spatiales mais il faut bien noter que les a_i sont inconnues. On les détermine en imposant que le calcul de l'approximation suivante $N^{(n+1)}$ est possible et en tronquant le système (12) à l'ordre n. Comme en (17) on a

$$F_i^{(n)} + (\mathcal{A} N^{(n)}, V_i) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, q$$

Le système (12) tronqué à l'ordre n s'écrit

$$\frac{\partial a_j}{\partial t} + \sum_{k=0}^{n} \epsilon^k \ (\mathcal{A}\, N^{(k)}, V_j) \ = \ 0 \ .$$

La solution à l'ordre n est donc

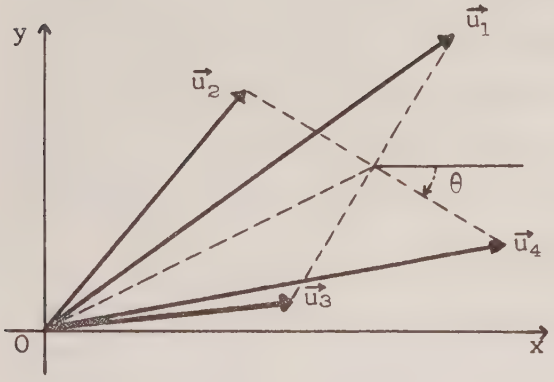
$$N^{(n)} = N^{(0)} + \epsilon N^{(1)} + \ldots + \epsilon^n N^{(n)}$$

avec

$$\frac{\partial a_j}{\partial t} + (\mathcal{A} N^{(n)}, V_j) = 0 \qquad j = 1, \ldots, q \ . \tag{19}$$

les $N^{(r)}$ $0 \leqslant r \leqslant n$ étant connues en fonction des a_j et de leurs dérivées spatiales. On reconnaît la forme des équations de conservation (I-29). Suivant l'ordre d'approximation considéré 0, 1, 2,... ce système (19) s'apparente aux systèmes d'équations d'Euler, de Navier-Stokes, de Burnett,...

2 - Exemple



On envisage un modèle plan à 4 vitesses $\vec{u_i}$, $i = 1, 2, 3, 4$, telles que : $\vec{u_1} + \vec{u_3} = \vec{u_2} + \vec{u_4}$, $(\vec{u_1} - \vec{u_3})^2 = (\vec{u_2} - \vec{u_4})^2 = 4c^2$ et $(\vec{u_1} - \vec{u_3}).(\vec{u_2} - \vec{u_4}) = 0$.

On pose :

$$\vec{G} = \frac{1}{4} \sum_i \vec{u_i} \ , \quad \vec{U_i} = \vec{u_i} - \vec{G} \ , \quad \vec{U} = \vec{u} - \vec{G}$$

Dans le repère orthonormé Oxy on a, ϵ_0 pouvant être $+1$ ou -1 :

$$\vec{U_i} = (U_i, V_i) = (c \cos(\theta + i\frac{\pi}{2}\epsilon_0), \ c \sin(\theta + i\frac{\pi}{2}\epsilon_0)) \ , \quad \vec{G} = (G, H)$$

$$\vec{u_i} = (u_i, v_i) \ , \quad \vec{u} = (u, v) \ , \quad \vec{U} = (U, V) \ .$$

Les collisions non triviales sont ici $\vec{u_i}$, $\vec{u_{i+2}} \longrightarrow \vec{u_{i+1}}$, $\vec{u_{i+3}}$ pour $i = 1, 2, 3, 4$. L'hypothèse I de microréversibilité est supposée réalisée et le système des équations cinétiques pour ce modèle est analogue à celui écrit dans (I - § E-2) pour un modèle plan régulier à 2r vitesses de même module ; on pose $\alpha_1 = \alpha$.

$$(20)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial N_i}{\partial t} + \vec{u}_i \,.\, \vec{\nabla} N_i = B\alpha \left(N_{i+1}\, N_{i+3} - N_i\, N_{i+2} \right) \\ \\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \end{cases}$$

On prendra pour bases orthonormées dans $\mathbb{F}$ qui est de dimension 3, et dans $\mathbb{R}^4$ respectivement :

$$(21)\qquad \begin{cases} V_1 = \frac{1}{2}(1,\ 1,\ 1,\ 1) \qquad V_2 = \frac{1}{\sqrt{2c^2}}\,(U_1, U_2, U_3, U_4) \qquad V_3 = \frac{1}{\sqrt{2c^2}}\,(U_1, U_2 U_3, U_4) \\ \\ V_1,\ V_2,\ V_3, \qquad W_4 = \frac{1}{2}(-1,\ \ 1,\ -1,\ 1)\ . \end{cases}$$

Par suite on peut écrire :

$$(22)\qquad \begin{cases} N = \frac{n}{2} V_1 + \frac{n}{\sqrt{2c^2}}\,(U V_2 + U V_3) + b_4\, W_4 \\ \\ N_i = \frac{n}{4} + \frac{n}{2c^2}\,\vec{U} \,.\, \vec{U_i} + \frac{b_4}{2}\,(-1)^i \qquad\qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \end{cases}$$

Le gaz est dans un état maxwellien si $\operatorname{Log} N$ est dans $\mathbb{F}$ c'est à dire si $N_1 N_3 = N_2 N_4$; d'après la théorie générale (I - § D) cette équation détermine de manière unique b_4 dans l'état maxwellien en fonction de n et $\vec{u}$; on notera ce b_4, b_{4M} . Compte tenu de (22) on a pour déterminer b_{4M}

$$\left(\frac{n}{4} + \frac{n}{2c^2}\,\vec{U} \,.\, \vec{U_1} - \frac{b_4}{2}\right)\left(\frac{n}{4} + \frac{n}{2c^2}\,\vec{U} \,.\, \vec{U_3} - \frac{b_4}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{n}{4} + \frac{n}{2c^2}\,\vec{U} \,.\, \vec{U_2} + \frac{b_4}{2}\right)\left(\frac{n}{4} + \frac{n}{2c^2}\,\vec{U} \,.\, \vec{U_4} + \frac{b_4}{2}\right).$$

Cette équation exhibe un b_{4M} unique qui tout calcul fait s'écrit :

$$(23)\qquad b_{4M} = \frac{n}{8c^4}\left\{ \left[\vec{U} \,.\, (\vec{U_2} - \vec{U_4})\right]^2 - \left[\vec{U} \,.\, (\vec{U_1} - \vec{U_3})\right]^2 \right\}$$

Avant d'expliciter la méthode de Chapman Enskog donnons les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement ; en fait elles correspondent aux 3 équations de conservation que l'on peut écrire pour ce modèle. En mettant dans des membres différents les dérivées par rapport au temps et les dérivées par rapport à l'espace ce sont d'après (I-31)

$$(24)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla}.(\rho\,\vec{u}) \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho\,\vec{u}) = -\vec{\nabla}.(\rho\,\vec{u}\,\vec{u}) - \vec{\nabla}.\mathbb{P} \end{cases}$$

$\mathbb{P}$ dont l'expression est donnée en (I-20) se met sous la forme suivante :

$$\mathbb{P} = m \sum_i N_i (\vec{u}_i - \vec{u})(\vec{u}_i - \vec{u})$$

$$\mathbb{P} = m \sum_i \left[\frac{n}{4} + \frac{n}{2c^2}\,\vec{U}.\vec{U}_i + \frac{b_4}{2}(-1)^i \right] (\vec{U}_i - \vec{U})(\vec{U}_i - \vec{U})$$

$$(25)\qquad \mathbb{P} = \rho\frac{c^2}{2}\,\mathbf{1} - \rho\,\vec{U}\,\vec{U} + m\,b_4(\vec{U}_1\,\vec{U}_3 - \vec{U}_2\,\vec{U}_4)\cdot$$

Cette dernière expression s'obtient en explicitant la sommation en i dans l'expression précédente sachant que $\vec{U}_1 + \vec{U}_3 = \vec{U}_2 + \vec{U}_4 = 0$ et $\vec{U}_i^2 = c^2$. Les notations tensorielles employées sont celles du livre de Chapman et Cowling [9]

L'approximation O dans la méthode de Chapman Enskog

D'après (16) et compte tenu de (22) les densités $N_i^{(o)}$ sont :

$$(26)\qquad \begin{cases} N_i^{(o)} = \dfrac{n}{4} + \dfrac{n}{2c^2}\,\vec{U}.\vec{U}_i + \dfrac{b_4^{(o)}}{2}(-1)^i \qquad i = 1, 2, 3, 4 \\ \text{avec} \qquad b_4^{(o)} = \dfrac{n}{8c^4}\left\{[\vec{U}.(\vec{U}_2 - \vec{U}_4)]^2 - [\vec{U}.(\vec{U}_1 - \vec{U}_3)]^2\right\} \end{cases}$$

$b_4^{(o)}$ a pour expression l'expression (23) de b_4 dans l'état localement maxwellien associé aux grandeurs macroscopiques n et $n\,\vec{u}$.

L'approximation 1 dans la méthode de Chapman Enskog

On utilisera les résultats acquis lors de l'exposé de la méthode de Chapman Enskog dans le paragraphe B-1 afin d'arriver relativement vite à l'expression de $N^{(1)}$. Des équations cinétique (20) on déduit l'équation pour $N^{(1)}$ analogue à (14) en posant d'une part $N_i = N_i^{(o)} + N_i^{(1)}$ avec $N_i^{(1)}$ petit et en linéarisant les seconds membres de (20), et d'autre part en calculant les premiers membres de (20) à l'approximation O :

$$(27)\qquad \left[\frac{\partial N_i}{\partial t}\right]^{(o)} + \vec{u}_i \cdot \vec{\nabla} N_i^{(o)} = B\alpha\left(N_{i+1}^{(o)} N_{i+3}^{(1)} + N_{i+1}^{(1)} N_{i+3}^{(o)} - N_i^{(o)} N_{i+2}^{(1)} - N_i^{(1)} N_{i+2}^{(o)}\right)$$

$\left[\frac{\partial N_i}{\partial t}\right]^{(o)}$ s'obtient d'après la théorie générale en sommant les termes de la forme $\frac{\partial N_i^{(o)}}{\partial a} F_a^{(o)}$, c'est à dire les termes obtenus comme produit d'une dérivée de $N_i^{(o)}$ par rapport à une variable d'état macroscopique par le second membre de l'équation de conservation écrite à l'ordre 0 et associée à cette variable d'état, les équations de conservation étant mises sous la forme (24). Les équations de conservation à l'ordre 0 sont les équations (24) à condition de remplacer b_4 par $b_4^{(o)}$,(26), dans l'expression (25) de $\mathbb{P}$. La nouvelle expression de $\mathbb{P}$ est notée $\mathbb{P}^{(o)}$.

On écrit $b_4^{(o)}$ sous une forme plus courte mais moins symétrique :

$$b_4^{(o)} = \frac{n}{2c^4}\left[(\vec{U}\cdot\vec{U}_2)^2 - (\vec{U}\cdot\vec{U}_1)^2\right].$$

L'expression (26) pour $N_i^{(o)}$ peut se mettre sous la forme :

$$N_i^{(o)} = \frac{n}{4} + \frac{1}{2c^2}(n\vec{u} - n\vec{G})\cdot\vec{U}_i + \frac{(-1)^i}{4c^4} n\left[(\vec{U}\cdot\vec{U}_2)^2 - (\vec{U}\cdot\vec{U}_1)^2\right]$$

D'où :

$$(28)\qquad \begin{cases} \left[\frac{\partial N_i}{\partial t}\right]^{(o)} = \left\{\frac{1}{4} - \frac{1}{2c^2}\vec{G}\cdot\vec{U}_i + \frac{(-1)^i}{4c^4}\left[(\vec{U}\cdot\vec{U}_2)^2 - (\vec{U}\cdot\vec{U}_1)^2\right]\right\} F_n^{(o)} \\ \qquad + \frac{1}{2c^2}\vec{U}_i \cdot F_{n\vec{u}}^{(o)} + \frac{(-1)^i}{2c^4} n\left[(\vec{U}\cdot\vec{U}_2)\vec{U}_2 - (\vec{U}\cdot\vec{U}_1)\vec{U}_1\right]\cdot F_{\vec{U}}^{(o)} \end{cases}$$

avec

$$(29)\qquad \begin{cases} F_n^{(o)} = -\vec{\nabla}\cdot(n\vec{u}) \\ F_{n\vec{u}}^{(o)} = -\vec{\nabla}\cdot(n\vec{u}\,\vec{u}) - \vec{\nabla}\cdot\left\{n\frac{c^2}{2}\mathbb{1} - n\vec{U}\vec{U} + \frac{n}{2c^4}\left[(\vec{U}\cdot\vec{U}_2)^2 - (\vec{U}\cdot\vec{U}_1)^2\right](\vec{U}_1\vec{U}_3 - \vec{U}_2\vec{U}_4)\right\} \\ F_{\vec{U}}^{(o)} = \frac{1}{n}\left(F_{n\vec{u}}^{(o)} - \vec{u}\,F_n^{(o)}\right). \end{cases}$$

Cette dernière égalité est évidente si on cherche à calculer $\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}$ à partir de (24).

Par ailleurs en considérant l'expression (26) de $N_i^{(o)}$

$$(30)\qquad \begin{cases} \vec{u}_i \cdot \vec{\nabla} N_i^{(o)} = (\vec{u}_i\cdot\vec{\nabla} n)\left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{2c^2}\vec{U}\cdot\vec{U}_i + \frac{(-1)^i}{4c^4}\left[(\vec{U}\cdot\vec{U}_2)^2 - (\vec{U}\cdot\vec{U}_1)^2\right]\right\} \\ \qquad + \vec{u}_i \cdot \vec{\nabla}\vec{U}\cdot\left\{\frac{n}{2c^2}\vec{U}_i + \frac{(-1)^i}{2c^4} n\left[(\vec{U}\cdot\vec{U}_2)\vec{U}_2 - (\vec{U}\cdot\vec{U}_1)\vec{U}_1\right]\right\} \end{cases}$$

D'après la théorie générale le premier membre des équations (27) lorsqu'on utilise les expressions (28) (29) et (30) est orthogonal à l'espace $\mathbf{F}$ des invariants des rencontres ; autrement dit le vecteur de $\mathbb{R}^4$ de composantes $\left[\frac{\partial N_i}{\partial t}\right]^{(o)} + \vec{u}_i \,.\, \vec{\nabla} N_i^{(o)}$ avec $i = 1, 2, 3, 4$ est un vecteur parallèle à $W_4 = \frac{1}{2}(-1, 1, -1, 1)$ et son expression se réduit donc à :

$$\left[\frac{\partial N_i}{\partial t}\right]^{(o)} + \vec{u}_i \,.\, \vec{\nabla} N_i^{(o)} = \frac{(-1)^i}{2} \left\{ \left[(\vec{U}.\vec{U}_2)^2 - (\vec{U}.\vec{U}_1)^2 \right] \left[\frac{F_n^{(o)}}{2c^4} + \frac{1}{2c^4} \vec{G} \,.\, \vec{\nabla} n \right] \right.$$

$$+ \left[(\vec{U}.\vec{U}_2)\vec{U}_2 - (\vec{U}.\vec{U}_1)\vec{U}_1 \right] . \left[\frac{n}{c^4} F_{\vec{U}}^{(o)} + \frac{n}{c^4} \vec{G} . \vec{\nabla} \vec{U} \right] + \frac{1}{2c^2} \vec{U} \,.\, (\vec{U}_2\vec{U}_2 - \vec{U}_1\vec{U}_1) \,.\, \vec{\nabla} n$$

$$\left. + \frac{n}{2c^2} \vec{\nabla}\vec{U} : (\vec{U}_2\vec{U}_2 - \vec{U}_1\vec{U}_1) \right\} \equiv \frac{(-1)^i}{2} \mathcal{X}$$

car dans le calcul de $\frac{1}{2} \sum_i (-1)^i \vec{u}_i \,.\, \vec{\nabla} N_i^{(o)}$ on a utilisé :

$$\sum_i \vec{u}_i = 4\vec{G}$$

$$\sum_i (-1)^i (\vec{u}_i \,.\, \vec{\nabla} n)(\vec{U}.\vec{U}_i) = 2 \vec{U} \,.\, (\vec{U}_2\vec{U}_2 - \vec{U}_1\vec{U}_1) \,.\, \vec{\nabla} n$$

$$\sum_i (-1)^i \vec{u}_i \,.\, \vec{\nabla}\vec{U} \,.\, \vec{U}_i = 2 \vec{\nabla}\vec{U} : (\vec{U}_2\vec{U}_2 - \vec{U}_1\vec{U}_1) \,.$$

On appelle $\mathcal{X}$ le crochet commun figurant dans les 4 premiers membres des équations (27). Si on remplace dans $F_n^{(o)}$ et $F_{\vec{U}}^{(o)}$ donnés en (29), $\vec{u}$ par $\vec{U} + \vec{G}$ les termes contenant $\vec{G}$ dans $\mathcal{X}$ disparaissent car :

$$F_n^{(o)} + \vec{G} \,.\, \vec{\nabla} n = -\vec{\nabla} \,.\, (n\vec{G}) + \vec{G} \,.\, \vec{\nabla} n + \text{termes indépendants de } \vec{G}$$

$$n\left(F_{\vec{U}}^{(o)} + \vec{G} \,.\, \vec{\nabla}\vec{U}\right) = -\vec{\nabla} \,.\, (n\vec{U}\vec{G} + n\vec{G}\vec{U} + n\vec{G}\vec{G}) + \vec{U}(\vec{\nabla} \,.\, (n\vec{G})) + \vec{G}(\vec{\nabla} \,.\, (n\vec{G}))$$

$$+ \vec{G}(\vec{\nabla} \,.\, (n\vec{U})) + n\vec{G} \,.\, \vec{\nabla}\vec{U} + \text{termes indépendants de } \vec{G}$$

$$= \text{termes indépendants de } \vec{G}.$$

$\mathcal{X}$ a donc pour expression, celle écrite précédemment à condition de remplacer dans $F_n^{(o)}$ et $F_{\vec{U}}^{(o)}$, $\vec{u}$ par $\vec{U}$, soit :

$$\mathcal{X} = \left[(\vec{U}.\vec{U}_2)^2 - (\vec{U}.\vec{U}_1)^2 \right] \left[\frac{-1}{2c^4} \vec{\nabla} \,.\, (n\vec{U}) \right] + \left[(\vec{U}.\vec{U}_2)\vec{U}_2 - (\vec{U}.\vec{U}_1)\vec{U}_1 \right] . \left[-\frac{1}{c^4} \vec{\nabla} \,.\, (n \frac{c^2}{2} \mathbf{1}) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{c^4} \vec{\nabla} \,.\, \left\{ \frac{n}{2c^4} \left[(\vec{U}.\vec{U}_2)^2 - (\vec{U}.\vec{U}_1)^2 \right] (\vec{U}_1\vec{U}_3 - \vec{U}_2\vec{U}_4) \right\} + \frac{1}{c^4} \vec{U}(\vec{\nabla} \,.\, (n\vec{U})) \right]$$

$$+ \frac{1}{2c^2} \vec{U} \,.\, (\vec{U}_2\vec{U}_2 - \vec{U}_1\vec{U}_1) \,.\, \vec{\nabla} n + \frac{n}{2c^2} \vec{\nabla}\vec{U} : (\vec{U}_2\vec{U}_2 - \vec{U}_1\vec{U}_1)$$

Dans $\mathcal{K}$ on peut vérifier que le coefficient de $\vec{\nabla}n$ est nul ; le calcul ne présente aucune difficulté en utilisant les remarques suivantes :

$$\vec{\nabla}.(n\vec{U}) = \vec{\nabla}n\,.\,\vec{U} + n(\vec{\nabla}.\vec{U})$$

$$\vec{\nabla}.(n\mathbb{A}) = \mathbb{A}.\vec{\nabla}n + n\,\vec{\nabla}.\mathbb{A} \quad \text{si } \mathbb{A} \text{ est un tenseur d'ordre 2 symétrique}$$

$\vec{A}(\vec{B}.\vec{C}) = \vec{AB}.\vec{C} = \vec{B}.\vec{CA}$ quels que soient les 3 vecteurs $\vec{A}\ \vec{B}\ \vec{C}$ de $\mathbb{R}^2$. Par suite :

$$\mathcal{K} = \frac{n}{c^4}\left\{\left[(\vec{U}.\vec{U}_2)^2 - (\vec{U}.\vec{U}_1)^2\right](-\frac{1}{2}\vec{\nabla}.\vec{U}) + \left[(\vec{U}.\vec{U}_2)\vec{U}_2 - (\vec{U}.\vec{U}_1)\vec{U}_1\right].\right.$$

$$\left\{-\frac{1}{2c^4}(\vec{\nabla}[(\vec{U}.\vec{U}_2)^2 - (\vec{U}.\vec{U}_1)^2]).(\vec{U}_1\vec{U}_3 - \vec{U}_2\vec{U}_4) + \vec{U}(\vec{\nabla}.\vec{U})\right\} +$$

$$\left. + \frac{c^2}{2}\,\vec{\nabla}\vec{U} : (\vec{U}_2\vec{U}_2 - \vec{U}_1\vec{U}_1)\right\}.$$

On groupe les deux termes contenant $\vec{\nabla}.\vec{U}$ et on transforme un peu le second terme :

$$\mathcal{K} = \frac{n}{c^4}\left\{\frac{1}{2}[(\vec{U}.\vec{U}_2)^2 - (\vec{U}.\vec{U}_1)^2](\vec{\nabla}.\vec{U}) - \frac{1}{c^4}(\vec{U}.\mathbb{A}).[(\vec{\nabla}\vec{U}.(\vec{U}.\mathbb{A})).\mathbb{A}]\right.$$

$$\left. + \frac{c^2}{2}\,\vec{\nabla}\vec{U} : (\vec{U}_2\vec{U}_2 - \vec{U}_1\vec{U}_1)\right\}$$

où l'on a posé $\mathbb{A} = \vec{U}_2\vec{U}_2 - \vec{U}_1\vec{U}_1$. On explicite les deux premiers termes du crochet en se plaçant dans le repère Oxy et on arrive après quelques calculs à la forme suivante sachant que $\vec{U}_1 = (u_1, v_1)$:

$$\frac{1}{2}\left[(v_1^2 - u_1^2)(u^2 - v^2) - 4\,u\,v\,u_1\,v_1\right](\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y})$$

$$+\left[u(u_1^2 - v_1^2) + 2\,u_1\,v_1\,v\right](u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y})$$

$$+\left[v(v_1^2 - u_1^2) + 2\,u_1\,v_1\,u\right](v\frac{\partial v}{\partial y} + u\frac{\partial v}{\partial x})$$

quantité que l'on peut mettre sous la forme :

$$-\frac{1}{2}\,\vec{U}^2\,\vec{\nabla}\vec{U} : (\vec{U}_2\vec{U}_2 - \vec{U}_1\vec{U}_1) + (\vec{U}.\vec{U}_1)\,[\vec{U}, \vec{U}_1]\,[\vec{\nabla}, \vec{U}]$$

en notant par $[\vec{U}, \vec{U}_1]$ et $[\vec{\nabla}, \vec{U}]$ les expressions $(u\,v_1 - u_1\,v)$ et $(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})$

Donc :

$$(31) \qquad \mathcal{K} = \frac{n}{2c^4}\left\{(c^2 - \vec{U}^2)\,\vec{\nabla}\vec{U} : (\vec{U}_2\vec{U}_2 - \vec{U}_1\vec{U}_1) + 2(\vec{U}.\vec{U}_1)\,[\vec{U}, \vec{U}_1]\,[\vec{\nabla}, \vec{U}]\right\}$$

On revient à l'équation (27) et d'après la théorie générale on sait que $N^{(1)}$ est un vecteur proportionnel à W_4; en fait d'après (18) on doit écrire

$$N^{(1)} = b_4^{(1)} W_4 \qquad \text{soit} \qquad N_i^{(1)} = b_4^{(1)} \frac{(-1)^i}{2}$$

En portant ces expressions dans l'équation (27) il vient :

$$\frac{(-1)^i}{2} \mathcal{X} = \frac{(-1)^i}{2} B\alpha\, b_4^{(1)} \left(- N_{i+1}^{(0)} - N_{i+3}^{(0)} - N_i^{(0)} - N_{i+2}^{(0)} \right)$$

soit

$$\mathcal{X} = - B\alpha\, b_4^{(1)} n$$

$$(32) \qquad b_4^{(1)} = - \frac{\mathcal{X}}{B\alpha n} = \frac{-1}{2B\alpha c^4} \left\{ (c^2 - \vec{U}^2) \vec{\nabla}\vec{U} : (\vec{U}_2\vec{U}_2 - \vec{U}_1\vec{U}_1) + \right.$$
$$\left. + 2(\vec{U}.\vec{U}_1) [\vec{U}, \vec{U}_1] [\vec{\nabla}, \vec{U}] \right\} .$$

En résumé dans l'approximation 1 on a :

$$(33) \qquad N^{①} = N^{(0)} + N^{(1)}$$
$$= \left[\frac{n}{4} + \frac{n}{2c^2} \vec{U}.\vec{U}_i + \frac{b_4^{(0)}}{2} (-1)^i \right] + \frac{b_4^{(1)}}{2} (-1)^i$$

$b_4^{(0)}$ et $b_4^{(1)}$ étant explicités en (26) et (32). On en déduit notamment les approximations du tenseur des pressions $\mathbb{P}$ dont l'expression est donnée en (25)

$$(34) \qquad \begin{cases} \mathbb{P}^{①} = \mathbb{P}^{(0)} + \mathbb{P}^{(1)} \\ \mathbb{P}^{(0)} = \rho \frac{c^2}{2} \mathbf{1} - \rho \vec{U}\vec{U} + m\, b_4^{(0)} (\vec{U}_1\vec{U}_3 - \vec{U}_2\vec{U}_4) \\ \mathbb{P}^{(1)} = m\, b_4^{(1)} (\vec{U}_1\vec{U}_3 - \vec{U}_2\vec{U}_4) \quad . \end{cases}$$

Les expresions de $b_4^{(0)}$, $b_4^{(1)}$, $\mathbb{P}^{(0)}$, $\mathbb{P}^{(1)}$ en fonction des variables d'état macroscopique ont les caractères des lois de comportement, les principes suivants étant vérifiés : principe de dépendance de l'histoire du mouvement, principe de localisation spatiale, principe de l'indifférence matérielle. On utilise ici la terminologie de P. Germain [20]. Comme le tenseur des pressions ne dépend dans les approximations considérées que du vecteur vitesse $\vec{u}$ et des dérivées spatiales de $\vec{u}$, les deux premiers principes sont évidemment vérifiés. On peut s'assurer que le troisième l'est : dans ce but on introduit un repère $O^*x^*y^*$ en mouvement par rapport à Oxy. Les formules de changement de coordonnées sont de la forme :

$$\vec{x}^* = \vec{a}(t) + Q(t)\,\vec{x} \qquad \text{si} \qquad \vec{x}^* = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et où $Q(t)$ est une matrice orthogonale et $\vec{a}(t)$ un vecteur. On a :

$$\vec{u}^* = \frac{\vec{da}(t)}{dt} + \frac{dQ(t)}{dt}\vec{x} + Q(t)\,\vec{u}$$

$$\vec{u}_i^* = \frac{\vec{da}(t)}{dt} + \frac{dQ(t)}{dt}\vec{x} + Q(t)\,\vec{u}_i$$

Donc :

$$\vec{U}^* = Q\,\vec{U} \quad , \quad \vec{U}_i^* = Q\,\vec{U}_i$$

$$\vec{\nabla}^*\,\vec{U}^* = Q\,\vec{\nabla}\vec{U}Q^T \quad , \quad [\vec{\nabla}^*, \vec{U}^*] = \text{dét } Q.[\vec{\nabla}, \vec{U}]$$

Si on considère dans le repère étoilé les expressions de $b_4^{(0)}$, $b_4^{(1)}$, $\mathbb{P}^{(0)}$, $\mathbb{P}^{(1)}$ il est facile de voir qu'elles sont égales aux expressions de ces mêmes quantités dans le repère Oxy initial. Par exemple

$$b_4^{(1)*} = \frac{-1}{2B\alpha c^4}\left\{(c^2 - \vec{U}^{*2})\,\vec{\nabla}^*\vec{U}^* : (\vec{U}_2^*\vec{U}_2^* - \vec{U}_1^*\vec{U}_1^*) + 2(\vec{U}^*.\vec{U}_1^*)[\vec{U}^*, \vec{U}_1^*]\right.$$

$$\left.[\vec{\nabla}^*, \vec{U}^*]\right\}$$

$$= \frac{-1}{2B\alpha c^4}\left\{(c^2 - \vec{U}^2)\,\vec{\nabla}\vec{U} : (\vec{U}_2\vec{U}_2 - \vec{U}_1\vec{U}_1) + 2(\vec{U}.\vec{U}_1)[\vec{U}, \vec{U}_1][\vec{\nabla}, \vec{U}]\right\} = b_4^{(1)}$$

Ceci démontre le troisième principe.

Ce milieu est un milieu à mémoire infiniment courte et c'est un fluide visqueux [20]. Cependant le tenseur des pressions n'est pas une fonction isotrope du tenseur des taux des déformations ; au modèle sont associées des directions privilégiées à savoir les directions des quatre vitesses $\vec{U}_i$. $\mathbb{P}^{(0)}$ et $\mathbb{P}^{(1)}$ sont invariants dans le groupe de transformations conservant globalement ces directions : ceci veut dire que si on change ϵ_0 en $-\epsilon_0$ ou θ en $\theta + \frac{k\pi}{2}$, $\mathbb{P}^{(0)}$ et $\mathbb{P}^{(1)}$ sont inchangés, ou bien si on échange $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_3$ ou $\vec{U}_2$ et $\vec{U}_4$ ou encore si on change $\vec{U}_i$ en $\vec{U}_{i+k}$ pour $i = 1, 2, 3, 4$ alors $\mathbb{P}^{(0)}$ et $\mathbb{P}^{(1)}$ sont inchangés.

En tout point et pour toutes les directions le milieu subit une compression. Pour établir ce résultat on choisit un repère tel que $\theta = -\frac{\pi}{4}$ $\epsilon_0 = +1$. Alors

$$N_1^{(o)} = \frac{n}{4c^2}\left(c^2 + \sqrt{2}\, c\,(u+v) + 2uv\right) = \frac{n}{4c^2}\left(c+\sqrt{2}\,u\right)\left(c+\sqrt{2}v\right)$$

$$N_2^{(o)} = \frac{n}{4c^2}\left(c^2 + \sqrt{2}\, c\,(-u+v) - 2uv\right) = \frac{n}{4c^2}\left(c-\sqrt{2}u\right)\left(c+\sqrt{2}v\right)$$

$$N_3^{(o)} = \frac{n}{4c^2}\left(c^2 + \sqrt{2}\, c\,(-u-v) + 2uv\right) = \frac{n}{4c^2}\left(c-\sqrt{2}u\right)\left(c-\sqrt{2}v\right)$$

$$N_4^{(o)} = \frac{n}{4c^2}\left(c^2 + \sqrt{2}\, c\,(u-v) - 2uv\right) = \frac{n}{4c^2}\left(c+\sqrt{2}\,u\right)\left(c-\sqrt{2}v\right)$$

car $\quad b_4^{(o)} = -n\,\frac{uv}{c^2}$.

Les densités sont positives donc $\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}c < u < \frac{\sqrt{2}}{2}c \quad$ et $\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}c < v < \frac{\sqrt{2}}{2}c$

$$\mathbb{P}^{(o)} = \frac{\rho}{2}\begin{pmatrix} c^2 - 2u^2 & 0 \\ 0 & c^2 - 2v^2 \end{pmatrix}.$$

La conique associée au tenseur $\mathbb{P}^{(o)}$ est une ellipse; dans l'approximation 0 en tout point et pour toutes les directions le milieu subit une compression. Dans l'approximation 1 ce résultat n'est pas modifié qualitativement car on doit considérer que $\mathbb{P}^{(1)}$ est petit devant $\mathbb{P}^{(o)}$.

Dans le repère Oxy, on considère un écoulement stationnaire de glissement simple parallèle à Ox, pour le modèle vérifiant $\vec{G} = 0$. Le fluide exerce sur l'élément d'aire d'une plaque placée suivant Ox une force dont la partie due à $\mathbb{P}^{(1)}$ dans la direction Ox est tout calcul fait et sachant que $u = u(y)$, $v = 0$:

$$(\mathbb{P}^{(1)}.\vec{x}).\vec{x} = -2m\,b_4^{(1)}\cos\theta\,\sin\theta$$

$$= \frac{m}{2B\alpha c^2}\sin^2 2\theta\,\frac{\partial u}{\partial y} \quad .$$

Le coefficient $\frac{m}{2B\alpha c^2}\sin^2 2\theta$ est toujours positif et peut s'interpréter comme un coefficient de résistance au glissement ; il dépend de θ c'est à dire de l'angle de Ox avec l'une quelconque des vitesses $\vec{u}_i$.

2ème partie

ETAT MAXWELLIEN ASSOCIE A UN ETAT MICROSCOPIQUE

C - UNE PROPRIETE DE L'ETAT MAXWELLIEN ASSOCIE A UN ETAT MICROSCOPIQUE

On a démontré dans le premier chapître qu'étant donné un état microscopique caractérisé par la connaissance des p densités N_i, on peut lui associer un état maxwellien unique dans lequel les densités sont $N_i^{(o)}$ (I - § D-2). Autrement dit les p équations ci-dessous pour les p inconnues positives $N_i^{(o)}$ ont une solution unique.

$$(35) \qquad \begin{cases} (N^{(o)}, V_\alpha) = (N, V_\alpha) & \alpha = 1, \ldots, q \\ (\text{Log } N^{(o)}, W_\beta) = 0 & \beta = q+1, \ldots, p \,. \end{cases}$$

(36) Cette solution s'écrit $N_i^{(o)} = \exp\left(\sum_{\beta=1}^{q} c_\beta V_{\beta i}\right)$ où les c_β sont des fonctions bien déterminées des $a_\alpha = (N, V_\alpha)$, $\alpha = 1, \ldots, q$, définies par les relations (I-37). On se propose de préciser ces densités $N_i^{(o)}$.

1 - Une inégalité

Proposition 1. Si à l'état microscopique de densités N_i est associé l'état maxwellien de densités $N_i^{(o)}$ alors à l'état microscopique de densités λN_i est associé l'état maxwellien de densités $\lambda N_i^{(o)}$, $\lambda > 0$.

Ceci est évident car d'après (35) :

$$\sum_i \lambda N_i^{(o)} V_{\alpha i} = \sum_i \lambda N_i V_{\alpha i} \qquad \alpha = 1, \ldots, q.$$

$$\begin{cases} \sum_i (\text{Log } \lambda N_i^{(o)}) W_{\beta i} = \text{Log}\,\lambda \left(\sum_i W_{\beta i} \right) + \sum_i \text{Log } N_i^{(o)} . W_{\beta i} = 0 \\ \beta = q+1, \ldots, p. \end{cases}$$

On introduit dès maintenant le vecteur de $\mathbf{F}$, $V_1 = \frac{1}{\sqrt{p}} (1, 1, \ldots, 1)$. Ce vecteur va jouer un rôle particulier aussi on le prend comme premier vecteur de la base de $\mathbf{F}$ (I - § C - 1)

Proposition 2. Si à l'état microscopique de densités N_i est associé l'état maxwellien caractérisé par $c_1, c_2, \ldots, c_q$, alors à l'état microscopique de densités λN_i est associé l'état maxwellien caractérisé par $c_1 + \sqrt{p}\ \text{Log}\ \lambda, \quad c_2, \ldots, c_q$.

$$\lambda N_i^{(o)} = \lambda \exp \left(\sum_{\beta=1}^{q} c_\beta V_{\beta i} \right)$$

$$= \exp \left\{ (c_1 + \sqrt{p}\ \text{Log}\ \lambda) V_{1i} + \sum_{\beta=2}^{q} c_\beta V_{\beta i} \right\}$$

En vertu de l'unicité de l'état maxwellien associé à un état microscopique, la proposition est démontrée .

D'après (35) et (36) on a :

$$\sum_i \exp \left(\sum_{\beta=1}^{q} c_\beta V_{\beta i} \right) V_{\alpha i} = \sum_i N_i V_{\alpha i} \qquad \alpha = 1, \ldots, q.$$

Multiplions cette égalité par c_α et sommons en α. Il vient :

$$(37) \qquad \sum_i \sum_{\alpha=1}^{q} \exp \left(\sum_{\beta=1}^{q} c_\beta V_{\beta i} \right) c_\alpha V_{\alpha i} = \sum_i \sum_{\alpha=1}^{q} N_i c_\alpha V_{\alpha i}$$

Par ailleurs

$$\sum_i \sum_{\alpha=1}^{q} c_\alpha V_{\alpha i} = \sum_{\alpha=1}^{q} c_\alpha \left(\sum_i V_{\alpha i} \right) = \sqrt{p}\ c_1$$

car $\sum_i V_{\alpha i} = \sqrt{p}\ (V_\alpha , V_1)$. (37) se transforme :

$$\sum_i \sum_{\alpha=1}^{q} \left\{ \exp \left(\sum_{\beta=1}^{q} c_\beta V_{\beta i} \right) - 1 \right\} c_\alpha V_{\alpha i} = \sum_i \sum_{\alpha=1}^{q} N_i c_\alpha V_{\alpha i} - \sqrt{p}\ c_1$$

On se rappelle que $\sum_i N_i V_{\alpha i} = a_\alpha$ et on pose $y_i = \sum_{\alpha=1}^{q} c_\alpha V_{\alpha i}$:

$$\sum_i (\exp y_i - 1) y_i = \sum_{\alpha=1}^{q} a_\alpha c_\alpha - \sqrt{p}\, c_1$$

Or $(\exp y_i - 1)y_i$ est positif ou nul pour tout y_i d'où

$$\sum_{\alpha=1}^{q} a_\alpha c_\alpha - \sqrt{p}\, c_1 \geqslant 0 \,. \tag{38}$$

Cette inégalité est valable quel que soit l'état microscopique de densités N_i Changeons N_i en λN_i alors a_α est changé en λa_α par définition des a_α et les c_α sont changés comme indiqué dans la proposition 2. On déduit :

$$\begin{cases} \sum_{\alpha=2}^{q} \lambda a_\alpha c_\alpha + (\lambda a_1 - \sqrt{p})(c_1 + \sqrt{p} \operatorname{Log} \lambda) \geqslant 0 \\ \text{pour tout} \quad \lambda \in]0, \infty[\,. \end{cases} \tag{39}$$

Remarques

1. On aurait pu démontrer directement (39) en calculant son premier membre. Il vaut $\sum_i (\lambda e^{y_i} - 1)(y_i + \operatorname{Log} \lambda)$ et on sait que $(\lambda e^{y_i} - 1)(y_i + \operatorname{Log} \lambda)$ est toujours positif ou nul.

2. Pour $\lambda = 1$ (39) se réduit naturellement à (38). Pour λ tendant vers 0 ou vers l'infini (39) donne des inégalités triviales.

3. Avec $\lambda = \frac{\sqrt{p}}{a_1}$ ce qui est légitime car $a_1 = (N, V_1)$ est positif on trouve : $\sum_{\alpha=2}^{q} c_\alpha a_\alpha \geqslant 0$.

2 - Théorème préliminaire

Enoncé du théorème

Soient deux nombres strictement positifs μ et M tels que $0 < \mu < M$. Soit un état microscopique dont les densités N_i vérifient pour tout i :

$$\frac{1}{p}\frac{\mu}{M} < N_i < \frac{1}{p} \qquad i = 1, \ldots, p.$$

Alors il existe une constante β_0 négative telle que les densités $N_i^{(0)}$ de l'état maxwellien associé vérifient :

(40) $\exp \beta_0 < N_i^{(0)} < 1 \qquad i = 1, \ldots, p$

β_0 dépend de μ, M et p.

a) Dans le cadre des hypothèses du théorème on a en utilisant la première des équations (35) $(N^{(0)}, V_1) = (N, V_1)$ ou bien

$$\sum_i N_i^{(0)} = \sum_i N_i < p \frac{1}{p} = 1 .$$

Il résulte de ceci, les $N_i^{(0)}$ étant tous positifs et étant donnés par (36)

(41) $N_i^{(0)} < 1 \qquad i = 1, \ldots, p$

(42) $\sum_{\alpha=1}^{q} c_\alpha V_{\alpha i} < 0 \qquad i = 1, \ldots, p .$

b) (42) et les hypothèses du théorème conduisent à :

$$\frac{1}{p} \left(\sum_{\alpha=1}^{q} c_\alpha V_{\alpha i} \right) < N_i \left(\sum_{\alpha=1}^{q} c_\alpha V_{\alpha i} \right) < \frac{1}{p} \frac{\mu}{M} \left(\sum_{\alpha=1}^{q} c_\alpha V_{\alpha i} \right)$$

pour tout $i = 1, \ldots, p$. Sommons en i et rappelons nous la définition des vecteurs V_α et des variables d'état macroscopique a_α :

(43) $$\frac{\sqrt{p}}{p} c_1 < \sum_{\alpha=1}^{q} a_\alpha c_\alpha < \frac{\mu}{M} \frac{\sqrt{p}}{p} c_1 .$$

Cette double inégalité prouve que c_1 est négatif soit en comparant les deux membres extrêmes, soit en remarquant que $\sum_{\alpha=1}^{q} c_\alpha a_\alpha$ est négatif par construction d'après (42).

c) On déduit de (39) et de la seconde inégalité de (43)

$$\begin{cases} c_1 \left(\lambda \frac{\mu}{M} \frac{1}{\sqrt{p}} - \sqrt{p} \right) \geqslant p \operatorname{Log} \lambda - \lambda a_1 \sqrt{p} \operatorname{Log} \lambda \\ \text{pour tout } \lambda \in]0, \infty[\end{cases}$$

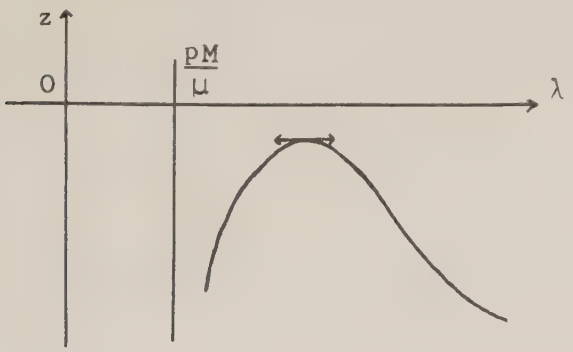
ou

(44) $$c_1 > \frac{\sqrt{p} - \lambda a_1}{\lambda \frac{\mu}{pM} - 1} \operatorname{Log} \lambda \quad \text{pour tout} \quad \lambda > \frac{pM}{\mu}$$

Le second membre de (44) est négatif ce qui est satisfaisant car c_1 est négatif; en effet $\frac{pM}{\mu}$ est supérieur à 1 et

$$\lambda a_1 = \lambda \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_i N_i > \sqrt{p} .$$

On va déduire de (44) que c_1 est borné inférieurement; on étudie dans ce but la fonction de λ :



$$z = \operatorname{Log} \lambda \frac{\sqrt{p} - \lambda a_1}{\lambda \frac{\mu}{pM} - 1} ,$$

son graphe à l'allure indiquée sur la figure

$$(45) \qquad c_1 > \sup_{\lambda \in \left]\frac{pM}{\mu}, \infty\right[} \operatorname{Log} \lambda \frac{\sqrt{p} - \lambda a_1}{\lambda \frac{\mu}{pM} - 1} = z_{Max} .$$

d) L'inégalité (45) n'est pas satisfaisante car z_{Max} dépend de a_1 donc des N_i . z_{Max} est défini par les deux équations :

$$\begin{cases} z_{Max} = \operatorname{Log} \lambda \, (\sqrt{p} - \lambda a_1)(\lambda \frac{\mu}{pM} - 1)^{-1} \\ \frac{1}{\lambda} (\sqrt{p} - \lambda a_1)(\lambda \frac{\mu}{pM} - 1) + \operatorname{Log} \lambda \, (a_1 - \frac{\mu\sqrt{p}}{M}) = 0 \\ \lambda > p \frac{M}{\mu} . \end{cases}$$

On peut vérifier que $\frac{d}{da_1}(z_{Max}) = - \frac{\lambda}{\operatorname{Log} \lambda} (\lambda \frac{\mu}{pM} - 1)^{-1} < 0$. z_{Max} décroît quand a_1 croît. Comme $\frac{1}{p} \frac{\mu}{M} < N_i < \frac{1}{p}$, a_1 varie sur l'intervalle $\left]\frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\mu}{M}, \frac{1}{\sqrt{p}}\right[$. z_{Max} atteint donc son minimum pour $a_1 = \frac{1}{\sqrt{p}}$; on appelle $\beta_o \frac{\sqrt{p}}{p}$ ce minimum lequel est donc défini par :

$$(46) \qquad \begin{cases} \beta_o = \operatorname{Log} \lambda \, (p - \lambda) \, (\lambda \frac{\mu}{pM} - 1)^{-1} \\ \frac{1}{\lambda} (p - \lambda) (\lambda \frac{\mu}{pM} - 1) + \operatorname{Log} \lambda (1 - \frac{\mu}{M}) = 0 \\ \lambda > p \frac{M}{\mu} \end{cases}$$

Compte tenu de cette étude et de (45) on a donc :

$$(47) \qquad c_1 > \frac{\beta_o}{\sqrt{p}}$$

Remarque. Comme β_o correspond par construction au maximum de $\text{Log}\,\lambda\,(p-\lambda)(\lambda\frac{\mu}{pM}-1)^{-1}$ pour $\lambda > p\frac{M}{\mu}$, c'est la meilleure borne inférieure possible pour c_1. Cependant on peut en avoir d'autres moins bonnes mais plus simples par exemple :

$$\beta_1 = \text{Log}\,\lambda_o(p-\lambda_o)(\lambda_o\frac{\mu}{pM}-1)^{-1} \quad \text{avec} \quad \lambda_o \text{ fixé supérieure à } \frac{pM}{\mu}$$

$$\beta_2 = -2p\frac{M}{\mu}\,\text{Log}\,2p\frac{M}{\mu} \quad . \tag{48}$$

e) On montre enfin que les $N_i^{(o)}$ sont bornés inférieurement par e^{β_o}.

$$\text{Log}\,N^{(o)} = \sum_{\alpha=1}^{q} c_\alpha\,V_\alpha$$

On multiplie scalairement cette égalité par V_1 :

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_i \text{Log}\,N_i^{(o)} = c_1$$

D'où d'après (47)

$$\sum_i \text{Log}\,N_i^{(o)} > \beta_o$$

Comme on a (41) il en résulte

$$\begin{cases} \text{Log}\,N_i^{(o)} > \beta_o \quad \text{ou} \quad N_i^{(o)} > e^{\beta_o} \\ \text{pour} \quad i = 1, \ldots, p. \end{cases} \tag{49}$$

3 - Une propriété de l'état maxwellien associé à un état microscopique .

Cette propriété est contenue dans le théorème suivant :

Théorème

Soient deux nombres μ et M strictement positifs, $0 < \mu < M$. Soit un état microscopique dont les densités N_i vérifient

$$\mu < N_i < M \qquad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, p$$

Alors il existe une constante β_o négative (dépendant de μ, M et p) telle que les densités $N_i^{(o)}$ de l'état maxwellien associé vérifient :

(50) $$p M e^{\beta_0} < N_i^{(0)} < p M \qquad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, p .$$

Soit $\lambda = \frac{1}{pM}$ et considérons l'état microscopique dont les densités sont $N_i^* = \lambda N_i$; à cet état est associé l'état maxwellien de densités $N_i^{(0)*}$ telles que $N_i^{(0)*} = \lambda N_i^{(0)}$ d'après la proposition 1 du paragraphe C - 1.

On a :

$$\frac{1}{p}\frac{\mu}{M} < N_i^* < \frac{1}{p} .$$

N_i^* vérifie les hypothèses du théorème préliminaire précédent donc

$$e^{\beta_0} < N_i^{(0)*} < 1$$

Par suite :

$$p M e^{\beta_0} < N_i^{(0)} < p M .$$

Ceci généralise pour un modèle de gaz à répartition discrète de vitesses quelconque, un résultat établi par Godunov et Sultangazin [21] pour le modèle de gaz décrit par Broadwell dans [2]. Ces auteurs ont établi que $\frac{\mu^2}{3M} < N_i^{(0)} < 3M$; la borne supérieure est semblable à celle trouvée ici mais la borne inférieure est de nature différente. Dans le paragraphe E on envisagera le modèle plan régulier à 2r vitesses de même module et on généralisera très simplement les inégalités de Godunov et Sultangazin (voir (75)).

Si dans un état microscopique de densités N_i aucune densité n'est proche de 0 (μ fixé strictement positif) il en est de même des densités $N_i^{(0)}$ de l'état maxwellien associé. L'un des $N_i^{(0)}$ ne peut tendre vers 0 que si l'un au moins des N_i tend vers 0.

D - UNE PROPRIETE DE L'ETAT INTERMEDIAIRE ASSOCIE A UN ETAT MICROSCOPIQUE

Ce paragraphe contient en fait des résultats généralisant ceux du paragraphe précédent. On va définir une famille d'états intermédiaires associée à un état microscopique ; l'état maxwellien associé à cet état microscopique est l'un d'entre eux.

1 - Définition de l'état intermédiaire associé à un état microscopique

Définition. On appelle état intermédiaire associé au nombre τ et à l'état microscopique de densités N_i, l'état du gaz dans lequel les densités sont $N_i^{(\tau)}$ définies par :

$$(51) \qquad (N^{(\tau)}, V_\alpha) = (N, V_\alpha) \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, q.$$

$$(52) \qquad (\text{Log } N^{(\tau)}, W_\beta) = \tau x_\beta \qquad \beta = q+1, \ldots, p.$$

avec

$$(53) \qquad (\text{Log } N, W_\beta) = x_\beta \quad .$$

$$\tau \in [0, 1]$$

Cet état intermédiaire existe et est unique : ceci s'obtient par application du résultat établi dans le théorème 1 de l'appendice II. En faisant $\tau = 0$ cet état intermédiaire se réduit à l'état maxwellien associé à l'état microscopique de densités N_i.

(52) et (53) permettent d'écrire :

$$(\text{Log } N^{(\tau)} - \tau \text{ Log } N, W_\beta) = 0 \qquad \beta = q+1, \ldots, p.$$

Il existe donc q quantités $c_\alpha^{(\tau)}$ $\alpha = 1, \ldots, q$ telles que :

$$(54) \qquad N_i^{(\tau)} = N_i^\tau \exp\left(\sum_{\alpha=1}^{q} c_\alpha^{(\tau)} V_{\alpha i}\right) \qquad i = 1, \ldots, p.$$

Proposition. Si à l'état microscopique de densités N_i est associé l'état intermédaire $N_i^{(\tau)}$ caractérisé par $c_1^{(\tau)}, c_2^{(\tau)}, \ldots, c_q^{(\tau)}$, alors à l'état microscopique de densités λN_i est associé l'état intermédiaire $\lambda N_i^{(\tau)}$ caractérisé par $c_1^{(\tau)} + \sqrt{p}(1-\tau) \text{ Log } \lambda$, $c_2^{(\tau)}, \ldots, c_q^{(\tau)}$. λ est positif ; τ est fixé.

Cette proposition généralise les propositions 1 et 2 du paragraphe C-1. Et il faut bien noter que comme dans le paragraphe cité on prend comme premier vecteur de la base de $\mathbb{F}$ le vecteur $V_1 = \frac{1}{\sqrt{p}}(1, 1, \ldots, 1)$.

Si N est changé en λN, Log N est changé en $\sqrt{p}\ \mathrm{Log}\,\lambda\ V_1 + \mathrm{Log}\ N$, et il est évident sur (52) (53) et (54) que dans l'état intermédiaire associé à τ et à l'état microscopique de densités λN_i, les densités sont $\lambda N_i^{(\tau)}$. Par ailleurs d'après (54) :

$$\lambda N_i^{(\tau)} = \lambda N_i^{\tau} \exp\Big(\sum_{\alpha=1}^{q} c_\alpha^{(\tau)} V_{\alpha i}\Big) = (\lambda N_i)^{\tau} \exp\Big((c_1^{(\tau)} + \sqrt{p}\ (1-\tau)\,\mathrm{Log}\,\lambda) V_{1i} + \sum_{\alpha=2}^{q} c_\alpha^{(\tau)} V_{\alpha i}\Big).$$

La proposition est démontrée.

2 - Une inégalité

Considérons l'expression de $N_i^{(\tau)}$ donnée par (54) et portons la dans (51) :

$$\sum_i N_i^{\tau} \exp\Big(\sum_{\beta=1}^{q} c_\beta^{(\tau)} V_{\beta i}\Big) V_{\alpha i} = \sum_i N_i V_{\alpha i}.$$

On multiplie cette équation par $c_\alpha^{(\tau)}$ et on somme les équations obtenues pour $\alpha = 1, \ldots, q$; en posant $y_i = \sum_{\alpha=1}^{q} c_\alpha^{(\tau)} V_{\alpha i}$ il vient :

$$\sum_i N_i^{\tau} e^{y_i} y_i = \sum_i \sum_{\alpha=1}^{q} N_i c_\alpha^{(\tau)} V_{\alpha i}.$$

Donc

$$\sum_i \sum_{\alpha=1}^{q} (N_i - N_i^{\tau}) c_\alpha^{(\tau)} V_{\alpha i} = \sum_i N_i^{(\tau)} e^{y_i} (y_i - 1).$$

D'où :

$$(55) \quad \sum_i \sum_{\alpha=1}^{q} (N_i - N_i^{\tau}) c_\alpha^{(\tau)} V_{\alpha i} \geqslant 0.$$

Cette inégalité est valable quel que soit l'état microscopique de densités N_i Changeons N_i en λN_i, les $c_\alpha^{(\tau)}$ sont changés comme indiqué dans la proposition du paragraphe D-1. On déduit :

$$(56)\quad \begin{cases} \sum_i \left\{ \frac{1}{\sqrt{p}} (\lambda N_i - \lambda^\tau N_i^\tau)(c_1^{(\tau)} + \sqrt{p}(1-\tau)\operatorname{Log}\lambda) + \sum_{a=2}^{q} (\lambda N_i - \lambda^\tau N_i^\tau) c_a^{(\tau)} V_{ai} \right\} \geqslant 0 \\ \text{pour tout } \lambda \in]0, \infty[. \end{cases}$$

Remarques

1. Pour $\tau = 0$ l'inégalité (56) se réduit à l'inégalité (39) obtenue pour l'état maxwellien associé à l'état microscopique de densités N_i .

2. On peut démontrer directement l'inégalité (56) en calculant son premier membre ; on vérifie qu'il vaut

$$\sum_i N_i^\tau (\lambda e^{y_i} - \lambda^\tau)(y_i + (1-\tau)\operatorname{Log}\lambda)$$

et on sait que $(\lambda e^{y_i} - \lambda^\tau)(y_i + (1-\tau)\operatorname{Log}\lambda)$ est toujours positif.

3 - Théorème préliminaire

Enoncé du théorème. Soient deux membres μ et M strictement positifs, $0 < \mu < M$. Soit un état microscopique dont les densités N_i vérifient pour tout i

$$\left(\frac{\mu^\tau}{pM}\right)^{\frac{1}{1-\tau}} \mu < N_i < \left(\frac{\mu^\tau}{pM}\right)^{\frac{1}{1-\tau}} M \qquad i = 1, \ldots, p.$$

où $\tau \in [0, 1]$. Alors il existe une constante négative β^* indépendante de τ telle que

$$(57)\qquad \left(\frac{\mu}{pM}\right)^{\frac{\tau}{1-\tau}} \exp\left(\frac{M}{\mu}\beta^*\right) < N_i^{(\tau)} < \left(\frac{\mu}{pM}\right)^{\frac{\tau}{1-\tau}}$$

β^* dépend de μ, M et p.

Pour $\tau = 0$ on retrouve l'énoncé du théorème préliminaire du paragraphe C-2. Le fait que β^* soit indépendante de τ a son importance comme on le verra dans le paragraphe suivant. On pose :

$$\mu_1 = \left(\frac{\mu^\tau}{pM}\right)^{\frac{1}{1-\tau}} \mu \qquad \text{et} \qquad M_1 = \left(\frac{\mu^\tau}{pM}\right)^{\frac{1}{1-\tau}} M$$

a) On considère l'équation (51) avec $\alpha = 1$:

$$\sum_i N_i^{(\tau)} = \sum_i N_i < p M_1 .$$

Donc $N_i^{(\tau)} < p M_1$: ceci prouve la seconde inégalité de (57).

D'après (54) :

$$\exp\Big(\sum_{\alpha=1}^{q} c_\alpha^{(\tau)} V_{\alpha i}\Big) = \frac{N_i^{(\tau)}}{N_i^{\tau}} < \frac{p M_1}{\mu_1^{\tau}} = 1$$

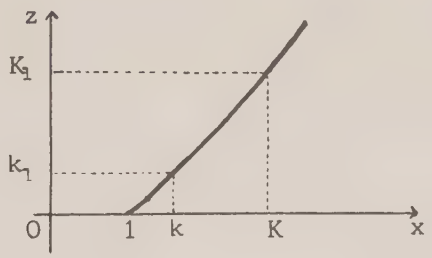
D'où :

(58) $$\sum_{\alpha=1}^{q} c_\alpha^{(\tau)} V_{\alpha i} < 0 .$$

b) Lemme. Soit N_i comme précisé dans l'énoncé du théorème. Soit $\tau \in [0,1]$. Il existe k_1, K_1 positifs et λ_0 supérieur à 1 tels que

(59) $$k_1 < \lambda_0 N_i - \lambda_0^{\tau} N_i^{\tau} < K_1 \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, p .$$

La fonction $z = x - x^{\tau}$ de la variable x est monotone croissante pour $x > 1$.



Soient $k = 1 + \mu$, $K = 2\frac{M}{\mu}(1+\mu)$. On définit k_1 et K_1 par

$k_1 = k - k^{\tau}$ $\qquad$ $K_1 = K - K^{\tau}$

Soit $\lambda_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{\mu_1} + \frac{K}{M_1}\right)$.

On vérifie que :

$$1 < k < K \qquad (\text{donc } k_1 < K_1)$$

$\lambda_0 > 1$ car $\lambda_0 = \frac{1+\mu}{2\mu}\left(\frac{\mu}{\mu_1} + 2\frac{M}{M_1}\right) = \frac{3}{2}(1+\mu)\left(\frac{pM_1}{\mu}\right)^{\frac{1}{1-\tau}}$ qui est le produit de trois quantités supérieures à 1.

$\frac{k}{\mu_1} < \frac{K}{M_1}$ car $\frac{K\mu_1}{k M_1} = \frac{K\mu}{k M} = 2$

$k < \lambda_0 N_i < K$ pour $i = 1, \ldots, p$, car $\frac{k}{\mu_1} < \lambda_0 < \frac{K}{M_1}$ et $\mu_1 < N_i < M_1$.

L'inégalité (59) en résulte. On remarque que k_1, K_1 et λ_o introduits ci-dessus dépendent de τ.

c) On multiplie la $i^{ème}$ inégalité (59) par $\sum_{\alpha=1}^{q} c_\alpha^{(\tau)} V_{\alpha i}$ et on somme en i, il vient en se rappelant la définition des V_α:

$$(60) \qquad \sqrt{p}\, K_1\, c_1^{(\tau)} < \sum_i \sum_{\alpha=1}^{q} (\lambda_o N_i - \lambda_o^\tau N_i^\tau)\, c_\alpha^{(\tau)} V_{\alpha i} < \sqrt{p}\, k_1\, c_1^{(\tau)} .$$

On écrit (56) sous une forme légèrement différente et on donne à λ la valeur λ_o exhibée dans le lemme :

$$\sum_i (\lambda_o N_i - \lambda_o^\tau N_i^\tau)(1-\tau) \operatorname{Log} \lambda_o \geqslant - \sum_i \sum_{\alpha=1}^{q} (\lambda_o N_i - \lambda_o^\tau N_i^\tau) c_\alpha^{(\tau)} V_{\alpha i} .$$

Avec la seconde inégalité de (60) et la seconde inégalité de (59), car $(1-\tau)\operatorname{Log}\lambda_o$ est positif, il vient :

$$p\, K_1 (1-\tau) \operatorname{Log} \lambda_o > - \sqrt{p}\, k_1\, c_1^{(\tau)}$$

soit :

$$(61) \qquad c_1^{(\tau)} > - \sqrt{p}\, \frac{K_1}{k_1} (1-\tau) \operatorname{Log} \lambda_o$$

$c_1^{(\tau)}$ est négatif d'après (60) et la borne inférieure pour $c_1^{(\tau)}$ exhibé dans (61) est bien négative. Elle dépend de τ.

d) On va majorer $\frac{K_1}{k_1} (1-\tau) \operatorname{Log} \lambda_o$ par une quantité indépendante de τ, par exemple de la manière suivante :

$$K_1 = K - K^\tau < K - 1$$

$$\lambda_o = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{\mu_1} + \frac{K}{M_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{\mu} + \frac{K}{M}\right) \left(\frac{\mu^\tau}{pM}\right)^{\frac{-1}{1-\tau}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{k}{\mu} + \frac{K}{M}\right) pM$$

$$\frac{1-\tau}{k_1} = \frac{1-\tau}{k-k^\tau} < \frac{1}{k-1}$$ car la fonction de τ, $\frac{1-\tau}{k-k^\tau}$ est monotone décroissante pour $\tau \in [0, 1]$.

Donc d'après (61) :

$$c_1^{(\tau)} > - \sqrt{p}\, \frac{K-1}{k-1} \operatorname{Log} \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{k}{\mu} + \frac{K}{M}\right) pM \right\}$$

Cette borne inférieure indépendante de τ pour $c_1^{(\tau)}$ est en fait la valeur du second membre de (61) pour $\tau = 0$. En conclusion il existe un nombre négatif indépendant de τ, mais dépendant de μ, M et p à savoir :

$$\beta^* = -p \frac{K-1}{k-1} \operatorname{Log} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{k}{\mu} + \frac{K}{M} \right) pM \right\} = -p \frac{2M(1+\mu) - \mu}{\mu^2} \operatorname{Log} \left\{ \frac{3}{2} \frac{1+\mu}{\mu} pM \right\} \tag{62}$$

tel que

$$c_1^{(\tau)} > \frac{\beta^*}{\sqrt{p}} \tag{63}$$

e) On montre enfin que les $N_i^{(\tau)}$ sont bornés inférieurement par $\mu_1^\tau \exp \frac{M}{\mu} \beta^*$. On multiplie l'inégalité $N_i < M_1$ par $\sum_{\alpha=1}^{q} c_\alpha^{(\tau)} V_{\alpha i}$ qui est négatif et on somme sur i, $i = 1, \ldots, p$:

$$\sum_i N_i \left(\sum_{\alpha=1}^{q} c_\alpha^{(\tau)} V_{\alpha i} \right) > M_1 c_1^{(\tau)} \sqrt{p} > M_1 \beta^*$$

D'où pour chaque i :

$$\sum_{\alpha=1}^{q} c_\alpha^{(\tau)} V_{\alpha i} > \frac{M_1}{N_i} \beta^* > \frac{M_1}{\mu_1} \beta^* = \frac{M}{\mu} \beta^*$$

Avec (54) il vient :

$$N_i^{(\tau)} = N_i^\tau \exp \left(\sum_{\alpha=1}^{q} c_\alpha^{(\tau)} V_{\alpha i} \right) > \mu_1^\tau \exp \left(\frac{M}{\mu} \beta^* \right)$$

4 - Une propriété de l'état intermédiaire associé à un état microscopique

Cette propriété est contenue dans le théorème suivant :

Théorème

Soient deux nombres μ et M strictement positifs $0 < \mu < M$. Soit un état microscopique dont les densités N_i vérifient :

$$\mu < N_i < M \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, p$$

Alors il existe une constante négative β^* indépendante de τ mais dépendant de μ, M et p, telle que les densités $N_i^{(\tau)}$ de l'état intermédiaire associé à cet état microscopique et au nombre τ vérifient :

$$p M \exp \frac{M}{\mu} \beta^* < N_i^{(\tau)} < pM \qquad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, p \tag{64}$$

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème du paragraphe C-3.

On pose $\lambda = \left(\frac{\mu^\tau}{pM}\right)^{\frac{1}{1-\tau}}$ et on considère l'état microscopique dont les densités sont $N_i^* = \lambda N_i$. Le résultat provient du théorème préliminaire et de la proposition des paragraphes D-3 et D-1.

Cette propriété généralise la propriété établie dans la paragraphe C pour l'état maxwellien associé à un état microscopique. On note que dans (64) les bornes pour $N_i^{(\tau)}$ sont indépendantes de τ. L'un des $N_i^{(\tau)}$ ne peut tendre vers 0 que si l'un au moins de N_i tend vers 0.

E - UNE EVALUATION DE LA DISTANCE ENTRE UN ETAT MICROSCOPIQUE ET L'ETAT MAXWELLIEN ASSOCIE.

Soit un état microscopique dont les densités sont N_i ; dans l'état maxwellien associé les densités sont $N_i^{(0)}$. On a en vue une généralisation d'un théorème de Godunov et Sultangazin [21] établi dans le cas du modèle spatial décrit par Broadwell dans [2] et donnant une majoration de $|N_i - N_i^{(0)}|$ par des termes de la forme $\left|\sqrt{N_i\, N_j} - \sqrt{N_k\, N_l}\right|$ avec (i, j) et (k, l) appartenant à la même classe d'équivalence C_α.

On considère le système de p équations à p inconnues X_i, $i = 1, 2, \ldots, p$ dépendant des $p - q$ paramètres $y_{q+1}, \ldots, y_p$:

$$(65) \qquad \begin{cases} (X, V_\alpha) = (N^{(0)}, V_\alpha) & \alpha = 1, 2, \ldots, q \\ (\mathrm{Log}\, X, W_\beta) = y_\beta & \beta = q+1, \ldots, p \end{cases}$$

D'après l'étude faite en appendice II ce système possède une solution et une seule; cette solution X est une fonction continue et indéfiniment dérivable des y_β. Pour $y_\beta = 0$, $\beta = q+1, \ldots, p$, et pour $y_\beta = x_\beta = (\mathrm{Log}\, N, W_\beta)$ $\beta = q+1, \ldots, p$, on a respectivement $X = N^{(0)}$ et $X = N$.

On peut appliquer la formule des accroissements finis aux fonctions $X_i = X_i(y_\beta)$ et écrire :

$$X_i(x_\beta) = X_i(o) + \sum_{\gamma=q+1}^{p} x_\gamma \frac{\partial X_i(\tau_i x_{q+1}, \ldots, \tau_i x_p)}{\partial y_\gamma}$$

où $\tau_i \in]0, 1[$

soit :

$$N_i - N_i^{(o)} = \sum_{\gamma=q+1}^{p} (\mathrm{Log}\, N, W_\gamma) \frac{\partial X_i(\tau_i x_\beta)}{\partial y_\gamma} \qquad \tau_i \in]0, 1[\quad . \tag{66}$$

Pour évaluer la différence $|N_i - N_i^{(o)}|$ on va essayer de majorer la valeur absolue des dérivées partielles figurant au second membre de (66).

a) Calcul de $\dfrac{\partial X_i(y_\beta)}{\partial y_\gamma}$

On dérive le système (65) par rapport à y_γ d'où p équations pour déterminer les $\dfrac{\partial X_i}{\partial y_\gamma}$, $i = 1, \ldots, p$:

$$\begin{cases} \sum_i \dfrac{\partial X_i}{\partial y_\gamma} V_{\alpha i} = 0 & \alpha = 1, \ldots, q \\ \sum_i \dfrac{1}{X_i} \dfrac{\partial X_i}{\partial y_\gamma} W_{\beta i} = \delta_{\beta\gamma} & \beta = q+1, \ldots, p. \end{cases} \tag{67}$$

On pose $z_i = X_i^{-\frac{1}{2}} \dfrac{\partial X_i}{\partial y_\gamma}$ et $\epsilon_i = X_i^{\frac{1}{2}}$; le système (67) se transforme en :

$$\begin{cases} \sum_i \epsilon_i z_i V_{\alpha i} = 0 & \alpha = 1, \ldots, q. \\ \sum_i \dfrac{1}{\epsilon_i} z_i W_{\beta i} = \delta_{\beta\gamma} & \beta = q+1, \ldots, p. \end{cases}$$

Le déterminant Δ de ce dernier système s'écrit d'après les calculs faits en appendice I

$$|\Delta| = \left\{ \sum_{(j_1, \ldots, j_q)} \left[\epsilon_{j_1} \epsilon_{j_2} \ldots \epsilon_{j_q} D_{j_1 \ldots j_q}(V_1, \ldots, V_q) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{(j_{q+1}, \ldots, j_p)} \left[\frac{1}{\epsilon_{j_{q+1}}} \ldots \frac{1}{\epsilon_{j_p}} D_{j_{q+1} \ldots j_p}(W_{q+1}, \ldots, W_p) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{68}$$

où la première sommation est étendue à toutes les combinaisons sans répétition $(j_1, \ldots, j_q)$ de q nombres pris parmi les p nombres 1, 2, ... , p; de même la seconde sommation est étendue à toutes les combinaisons sans répétition de p - q nombres puis parmi 1, 2, ... , p.

On appelle Δ_i le cofacteur de $\frac{1}{\epsilon_i} W_{\beta i}$ dans le déterminant Δ d'où :

$$z_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} .$$

La solution de (67) est par suite :

$$(69) \qquad \frac{\partial X_i(y_\beta)}{\partial y_\gamma} = [X_i(y_\beta)]^{\frac{1}{2}} \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

les déterminants Δ_i et Δ étant calculés au point $X(y_\beta)$.

b) Majoration de $\frac{\partial X_i(\tau_i\ x_\beta)}{\partial y_\gamma}$

On suppose $\mu < N_i < M$ pour tout i ; d'après le paragraphe D il existe deux nombres μ^* et M^* indépendants de τ tels que les densités dans l'état intermédiaire associé à l'état microscopique de densités N_i et au nombre τ vérifient $\mu^* < N_i^{(\tau)} < M^*$, à savoir $\mu^* = pM \exp(\frac{M}{\mu}\beta^*)$ et $M^* = pM$.

$X_l(\tau_l\ x_\beta)$ est en fait identique à $N_l^{(\tau_l)}$, $l = 1, \ldots, p$; on va pouvoir utiliser l'inégalité $\mu^* < N_l^{(\tau)} < M^*$ pour majorer $\left|\frac{\partial X_i(\tau_i\ x_\beta)}{\partial y_\gamma}\right|$ donné en (69) car $\frac{\partial X_i(\tau_i\ x_\beta)}{\partial y_\gamma} = [N_i^{(\tau_i)}]^{\frac{1}{2}} \frac{\Delta_i}{\Delta}$ avec Δ_i et Δ calculés au point $X = N^{(\tau_i)}$.
On a d'après (68) :

$$|\Delta| > \left\{(\mu^*)^q \sum_{(j_1, \ldots, j_q)} \left[D_{j_1 \ldots j_q}(V_1, \ldots, V_q)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} .$$

$$\left\{(\frac{1}{M^*})^{p-q} \sum_{j_{q+1}, \ldots, j_p} \left[D_{j_{q+1} \ldots j_p}(W_{q+1}, \ldots, W_p)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} = (\mu^*)^{\frac{q}{2}} (\frac{1}{M^*})^{\frac{p-q}{2}} C'$$

où C' est une constante ; on a aussi

$$|\Delta_i| < C'' (\frac{1}{\mu^*})^{\frac{p-q-1}{2}} (M^*)^{\frac{q}{2}}$$

car Δ_i est une combinaison linéaire de termes de la forme $\epsilon_1^{\eta_1} \epsilon_2^{\eta_2} \ldots \epsilon^{\eta_p}$ avec $\eta_l = \pm 1$ le nombre de η_l égaux à $+1$ et à -1 étant respectivement q et $p - q - 1$; la constante C'' peut être prise indépendante de i.

$$\left|\frac{\partial X_i(\tau_i\ x_\beta)}{\partial y_\gamma}\right| < \frac{C'' (M^*)^{\frac{p+1}{2}}}{C' (\mu^*)^{\frac{p-1}{2}}}$$

Il existe donc une constante C_0 indépendante de μ et M (ne dépendant que du modèle) telle que :

$$(70) \qquad \left|\frac{\partial X_i(\tau_i\ x_\beta)}{\partial y_\gamma}\right| < C_0\ pM \exp\left\{-\frac{M}{\mu}\ \frac{p-1}{2}\beta^*\right\}$$

En utilisant cette estimation pour évaluer le premier membre de (66) on obtient le théorème suivant :

Théorème 1. Soient deux nombres μ et M tels que $0 < \mu < M$ et soit un état microscopique de densités N_i vérifiant $\mu < N_i < M$ pour $i = 1, 2, \ldots, p$, alors les densités $N_i^{(0)}$ de l'état maxwellien associé satisfont à :

$$(71) \qquad |N_i - N_i^{(0)}| \leq \left\{ \sum_{\gamma = q+1}^{p} |(\operatorname{Log} N, W_\gamma)| \right\} C_0\, pM \exp\left\{ -\frac{M}{\mu} \frac{p-1}{2} \beta^* \right\}$$

β^* est donné par la formule (62).

On peut donner une autre estimation pour $|N_i - N_i^{(0)}|$ plus semblable à celle trouvée par Godunov et Sultangazin [21]. Le système des $p - q$ équations $(X, W_\beta) = 0$, $\beta = q+1, \ldots, p$, a pour solutions les vecteurs de $\mathbb{F}$; de même le système d'équations $A_{ij}^{kl}(X_i + X_j - X_k - X_l) = 0$ pour tout i, j, k, l variant de 1 à p, a pour solutions les vecteurs de l'espace $\mathbb{F}$. Il existe donc des constantes λ_{ijkl}^{β} (il n'y a pas unicité en général car le second système n'est pas de Cramer en général) ne dépendant que du modèle telles que

$$\sum_i X_i\, W_{\beta i} = \sum_{i,j,k,l} \lambda_{ijkl}^{\beta}\, A_{ij}^{kl}(X_i + X_j - X_k - X_l) \qquad \forall\, X \in \mathbb{R}^p$$

Donc

$$\sum_i \operatorname{Log} N_i\, W_{\beta i} = \sum_{i,j,k,l} \lambda_{ijkl}^{\beta}\, A_{ij}^{kl}(\operatorname{Log} N_i N_j - \operatorname{Log} N_k N_l) .$$

Soit $C_1 C_0^{-1}$ le sup des coefficients $|\lambda_{ijkl}^{\beta}|$, i, j, k, l variant de 1 à p et β de $q+1$ à p.

$$|(\operatorname{Log} N, W_\beta)| \leq C_1 C_0^{-1} \sum_{i,j,k,l} A_{ij}^{kl} |\operatorname{Log} N_i N_j - \operatorname{Log} N_k N_l| .$$

Lemme $\left|\operatorname{Log} \frac{x}{y}\right| \leq 2 \sup\left(\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{\sqrt{y}}\right) |\sqrt{x} - \sqrt{y}|$ pour tout x et tout y positifs.

Il est facile de vérifier que $\operatorname{Log} z < 2(\sqrt{z} - 1)$ pour tout z positif; le lemme s'en déduit.

Théorème 2. Soient deux nombres μ et M tels que $0 < \mu < M$ et soit un état microscopique de densités N_i vérifiant $\mu < N_i < M$ pour $i = 1, 2, \ldots, p$, alors les densités $N_i^{(0)}$ de l'état maxwellien associé satisfont à :

$$|N_i - N_i^{(0)}| \leq \left\{ \sum_{\nu=q+1}^{p} |(\text{Log } N, W_\nu)| \right\} C_0\, pM \exp\left\{ -\frac{M}{\mu}\frac{p-1}{2}\beta^* \right\}$$

$$|N_i - N_i^{(0)}| \leq C_1 (p-q)\, p\, M \exp\left\{ -\frac{M}{\mu}\frac{p-1}{2}\beta^* \right\} \sum_{i,j,k,l} A_{ij}^{kl} \left| \text{Log } \frac{N_i N_j}{N_k N_l} \right|$$

$$(72) \quad |N_i - N_i^{(0)}| \leq C_1 2(p-q)p \frac{M}{\mu} \exp\left\{ -\frac{M}{\mu}\frac{p-1}{2}\beta^* \right\} \sum_{i,j,k,l} A_{ij}^{kl} \left| \sqrt{N_i N_j} - \sqrt{N_k N_l} \right|$$

C_0 C_1 sont des constantes ne dépendant que du modèle. β^* dépend de M et μ comme ceci se voit sur la formule (62).

La dernière inégalité généralise au cas d'un modèle quelconque de gaz à répartition discrète devitesses l'inégalité obtenue par Godunov et Sultangazin [21] : elle donne une majoration de $|N_i - N_i^{(0)}|$ par des termes de la forme $A_{ij}^{kl} \left| \sqrt{N_i N_j} - \sqrt{N_k N_l} \right|$. L'inégalité (72) fait apparaître une constante dépendant de μ et M, et n'est valable que pour les états microscopiques dont les densités vérifient $\mu < N_i < M$. Aucune restriction de cette nature n'est nécessaire dans le cas particulier traité par Godunov et Sultangazin, de même que dans le suivant :

Cas particulier. Modèle plan régulier à 2r vitesses de même module, les coefficients α_l étant supposés tous non nuls (I - §E-2) .

D'après la définition des invariants des rencontres pour ce modèle (I - 46) les équations pour déterminer les $N_i^{(0)}$ en fonction des N_i sont les suivantes

$$\begin{cases} N_i^{(0)} N_{i+r}^{(0)} = N_1^{(0)} N_{1+r}^{(0)} & i = 1, \ldots, r . \\ \sum_i N_i^{(0)} = \sum_i N_i \\ N_i^{(0)} - N_{i+r}^{(0)} = N_i - N_{i+r} & i = 1, \ldots, r \end{cases}$$

On pose $\nu_i = N_i^{(0)} - N_i = N_{i+r}^{(0)} - N_{i+r}$ $i = 1, \ldots, r$, les équations pour les ν_i sont :

$$(N_i + \nu_i)(N_{i+r} + \nu_i) = (N_1 + \nu_1)(N_{1+r} + \nu_1) \qquad i = 1, \ldots, r$$

$$\sum_{i=1}^{r} \nu_i = 0.$$

On appelle a^2 la valeur commune positive des produits $N_i^{(0)} N_{i+r}^{(0)}$; comme la somme des ν_i est nulle il existe au moins un $\nu_i \geqslant 0$ et au moins un $\nu_i \leqslant 0$ et par suite il existe i_1 et i_2 tels que $\nu_{i_1} \geqslant 0$ et $\nu_{i_2} \leqslant 0$ soit

$$N_{i_2} N_{i_2+r} \leqslant a^2 \leqslant N_{i_1} N_{i_1+r}$$

L'équation $(N_i + \nu_i)(N_{i+r} + \nu_i) = a^2$ a pour solution, car les $N_j^{(0)}$ sont positifs,

$$\nu_i = \frac{1}{2}\left\{ -N_i - N_{i+r} + \left[(N_i - N_{i+r})^2 + 4a^2\right]^{\frac{1}{2}} \right\} .$$

Donc :

$$-N_i - N_{i+r} + \sqrt{(N_i - N_{i+r})^2 + 4N_{i_2} N_{i_2+r}} \leqslant 2\nu_i \leqslant -N_i - N_{i+r} + \sqrt{(N_i - N_{i+r})^2 + 4N_{i_1} N_{i_1+r}}$$

En vertu du lemme établi ci-après on a

$$\nu_i \leqslant \left| \sqrt{N_i N_{i+r}} - \sqrt{N_{i_1} N_{i_1+r}} \right| \quad \text{si} \quad \nu_i \geqslant 0$$

$$-\nu_i \leqslant \left| \sqrt{N_i N_{i+r}} - \sqrt{N_{i_2} N_{i_2+r}} \right| \quad \text{si} \quad \nu_i \leqslant 0$$

(73) d'où $$|\nu_i| \leqslant \left| \sqrt{N_i N_{i+r}} - \sqrt{N_{i_1} N_{i_1+r}} \right| + \left| \sqrt{N_i N_{i+r}} - \sqrt{N_{i_2} N_{i_2+r}} \right|$$

soit

(74) $$\left| N_i - N_i^{(0)} \right| \leqslant \sum_{l=1}^{r} \left| \sqrt{N_i N_{i+r}} - \sqrt{N_l N_{l+r}} \right| .$$

Lemme. Quels que soient les nombres positifs a, b, c, d on a

$$\left| a+b - \sqrt{(a-b)^2 + 4cd} \right| < 2\left| \sqrt{ab} - \sqrt{cd} \right| .$$

On désigne par ϵ le signe de $ab - cd$, l'inégalité à démontrer s'écrit :

$$(a+b - 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{cd})\epsilon \leqslant \epsilon\left((a-b)^2 + 4cd\right)^{\frac{1}{2}}$$

soit l'inégalité équivalente suivante :

$$(a+b - 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{cd})^2 \epsilon \leqslant \epsilon\left((a-b)^2 + 4cd\right)$$

tout calcul fait on a :

$$4(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 (\sqrt{cd} - \sqrt{ab})\epsilon \leqslant 0 .$$

Remarque. On profite des calculs faits ici pour obtenir pour ce modèle particulier l'inégalité :

$$\frac{\mu^2}{3M} < N_i^{(0)} < 3M \tag{75}$$

sachant que les densités N_i de l'état microscopique auquel est associé l'état maxwellien de densités $N_i^{(0)}$ vérifient $\mu < N_i < M$. La borne inférieure est plus simple que celle obtenue dans (50) dans le cas général. Les inégalités (75) sont celles données par Godunov et Sultangazin [21] pour un modèle particulier.

D'après (73) on a $|\nu_i| < 2M$ donc $N_i^{(0)} = N_i + \nu_i \leqslant N_i + |\nu_i| < 3M$

De plus $N_i^{(0)} = \frac{a^2}{N_{i+r}^{(0)}} > \frac{\mu^2}{3M}$.

3ème partie

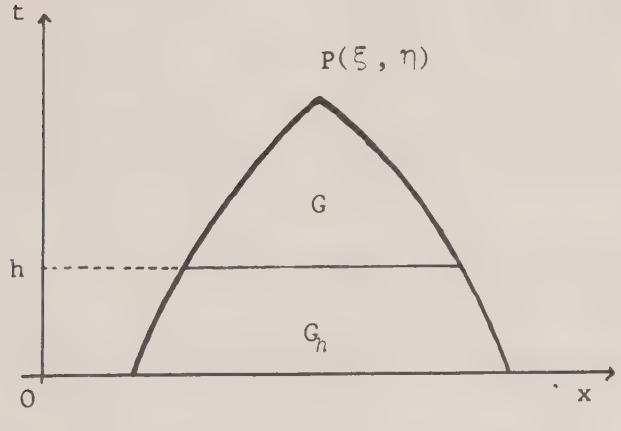
SYSTEME D'EQUATIONS CINETIQUES MODIFIEES

F - THEOREME D'EXISTENCE ET D'UNICITE DE LA SOLUTION D'UN SYSTEME D'EQUATIONS CINETIQUES MODIFIEES

On rappelle d'abord un théorème établi dans Courant et Hilbert [10]. Soit le système d'équations aux dérivées partielles pour les fonctions inconnues $U = (U^1, \ldots, U^k)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} U^i + \tau^i(x, t) \frac{\partial}{\partial x} U^i = F^i(x, t, U) \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Soit le domaine G limité par les caractéristiques extrèmes issues de $P(\xi, \eta)$. On suppose que τ^i et F^i sont des fonctions continues de leurs arguments et à dérivées continues, et qu'il existe une constante μ majorant $\|F^i\|$, $\|F^i_{U_l}\|$, $\|F^i_x\|$, et $\|F^i_t\|$ pour $(x, t) \in G$ et $\|U^i\| < 2\mu_0$ la norme étant celle du maximun. On se donne dans G les conditions initiales $U(x, 0) = \psi(x)$ telles que $\|\psi^i(x)\| < \mu_0$. Alors le problème de Cauchy admet une solution unique continue et à dérivées continues dans le domaine G_h, h assez petit.



Remarque. Si F^i est indépendant de (x, t), $\|F^i_{U_l}\| < \mu$ pour tout U alors la solution existe dans G entier.

Si on essaye d'appliquer ce théorème au système d'équations cinétiques (I - 11) c'est à dire :

$$(76)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial N_i}{\partial t} + u_i \dfrac{\partial N_i}{\partial x} = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{j,k,l} (A_{kl}^{ij} N_k N_l - A_{ij}^{kl} N_i N_j) \\ i = 1, \ldots, p. \end{cases}$$

il est facile de voir que l'on ne peut obtenir la solution que dans une bande bordant l'axe des x. Ceci résulte de ce que lorsqu'on applique le théorème avec pour conditions initiales la solution trouvée pour $t = h$ le nouvel h obtenu est en général moitié du précédent.

Aussi on va reprendre une idée introduite par Godunov et Sultangazin [21] à savoir mettre un dénominateur différent de 1 dans les seconds membres des équations (76).

1 - Les équations cinétiques modifiées

Soit δ un nombre strictement positif, les équations cinétiques modifiées sont les suivantes :

$$(77)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial N_i}{\partial t} + u_i \dfrac{\partial N_i}{\partial x} = \dfrac{\frac{1}{2} \displaystyle\sum_{j,k,l} (A_{kl}^{ij} N_k N_l - A_{ij}^{kl} N_i N_j)}{\left[1 + \delta^2 (\displaystyle\sum_k N_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \\ \equiv g_i \end{cases} .$$

On a en vue l'application du théorème rappelé ci-dessus et dans ce but on va établir deux inégalités.

Soit $$\alpha = \max_{i,j} \left(\sum_{k,l} A_{kl}^{ij}\right) = \max_{i,j} \left(\sum_{k,l} A_{ij}^{kl}\right) .$$

Inégalité I. Quelles que soient les densités N_i positives on a

$$(78)\qquad \left| \frac{\displaystyle\sum_{j,k,l} (A_{kl}^{ij} N_k N_l - A_{ij}^{kl} N_i N_j)}{\left[1 + \delta^2 (\displaystyle\sum_k N_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \right| \leq \frac{\alpha\sqrt{2}}{\delta} \left(\sum_k N_k\right) .$$

Il est équivalent de démontrer :

$$\delta^2 \left[\sum_{j,k,l} (A_{kl}^{ij} N_k N_l - A_{ij}^{kl} N_i N_j)\right]^2 \leq 2\alpha^2 \left(\sum_k N_k\right)^2 \left[1 + \delta^2 \left(\sum_k N_k\right)^2\right] .$$

Or :

$$\Big[\sum_{j,k,l}(A_{kl}^{ij}\,N_k\,N_l - A_{ij}^{kl}\,N_i\,N_j)\Big]^2 = \sum_{j,k,l}\sum_{j',k',l'}\Big\{A_{kl}^{ij}\,A_{k'l'}^{ij'}\,N_k\,N_l\,N_{k'}N_{l'} +$$

$$+ A_{ij}^{kl}\,A_{ij'}^{k'l'}\,N_i^2\,N_j\,N_{j'} - A_{kl}^{ij}A_{ij'}^{k'l'}\,N_k\,N_l\,N_i\,N_{j'} - A_{ij}^{kl}\,A_{k'l'}^{ij'}\,N_i\,N_j\,N_{k'}\,N_{l'}\Big\}$$

$$\leqslant \sum_{k,l,k',l'}\Big(\sum_j A_{kl}^{ij}\Big)\Big(\sum_{j'} A_{k'l'}^{ij'}\Big)N_k\,N_l\,N_{k'}\,N_{l'} + \sum_{j,j'}\Big(\sum_{k,l} A_{ij}^{kl}\Big)\Big(\sum_{k',l'} A_{ij'}^{k'l'}\Big)N_i^2\,N_j\,N_{j'}$$

$$\leqslant 2\alpha^2\Big(\sum_k N_k\Big)^4$$

car $\sum_j A_{kl}^{ij}$, $\sum_{j'} A_{k'l'}^{ij'}$, $\sum_{k,l} A_{ij}^{kl}$, $\sum_{k',l'} A_{ij'}^{k'l'}$ sont quatre quantités inférieures à α, et car $\Big(\sum_k N_k\Big)^4 = \sum_{k,l,k',l'} N_k\,N_l\,N_{k'}\,N_{l'} \geqslant \sum_{j,j'} N_i^2\,N_j\,N_{j'}$. Le résultat cherché est alors évident.

Inégalité II. Quelles que soient les densités N_i positives on a

$$(79)\qquad \Big|\frac{\partial\,\mathcal{G}_i}{\partial N_\beta}\Big| \leqslant 4\,\frac{\alpha}{\delta} \qquad i = 1, \ldots, p, \quad \text{et} \quad \beta = 1, \ldots, p.$$

Compte tenu de la définition de $\mathcal{G}_i$ donnée en (77) on a :

$$\frac{\partial\,\mathcal{G}_i}{\partial N_\beta} = \frac{1}{2}\sum_{j,k,l}(A_{kl}^{ij}\,N_k\,\delta_{l\beta} + A_{kl}^{ij}\,N_l\,\delta_{k\beta} - A_{ij}^{kl}\,N_i\,\delta_{j\beta} - A_{ij}^{kl}\,N_j\,\delta_{i\beta})(1+\delta^2(\sum_k N_k)^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{j,k,l}(A_{kl}^{ij}\,N_k\,N_l - A_{ij}^{kl}\,N_i\,N_j)(-\delta^2\sum_k N_k)\;(1+\delta^2(\sum_k N_k)^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

$\Big|\frac{\partial\,\mathcal{G}_i}{\partial N_\beta}\Big|$ est inférieur à la somme des modules des deux groupes de termes ; pour le second on utilise (78) :

$$\frac{1}{2}\;\frac{\Big|\sum_{j,k,l}(A_{kl}^{ij}\,N_k\,N_l - A_{ij}^{kl}\,N_i\,N_j)\Big|}{(1+\delta^2(\sum_k N_k)^2)^{\frac{1}{2}}\;(\sum_k N_k)}\cdot\frac{\delta^2(\sum_k N_k)^2}{1+\delta^2(\sum_k N_k)^2} \leqslant \frac{\alpha\sqrt{2}}{2\delta}\cdot 1\,.$$

Par ailleurs :

$$\sum_{j,k,l} A_{kl}^{ij}\,N_k\,\delta_{l\beta} = \sum_k\Big(\sum_j A_{k\beta}^{ij}\Big)N_k \leqslant \alpha\Big(\sum_k N_k\Big)\,.$$

Pour la somme suivante dans le premier groupe de termes on a la même inégalité.

$$\sum_{j,k,l} A_{ij}^{kl}\,N_i\,\delta_{j\beta} = \Big(\sum_{k,l} A_{i\beta}^{kl}\Big)N_i \leqslant \alpha\,N_i \leqslant \alpha\Big(\sum_k N_k\Big)$$

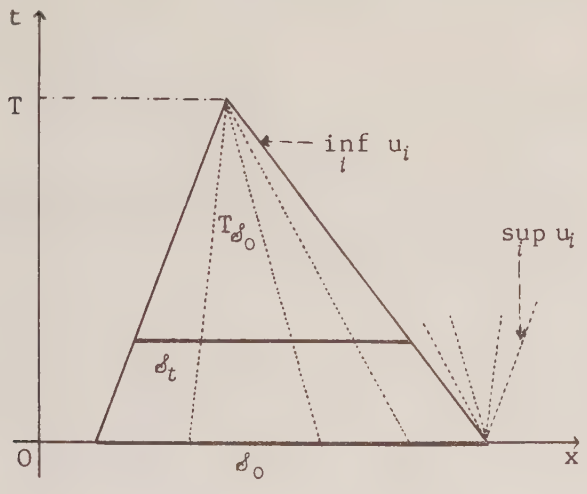
$$\sum_{j,k,l} A_{ij}^{kl} N_j \delta_{i\beta} = \sum_j \Big(\sum_{k,l} A_{ij}^{kl}\Big) N_j \delta_{i\beta} \leqslant \alpha\Big(\sum_j N_j\Big)\delta_{i\beta} \leqslant \alpha\Big(\sum_k N_k\Big) .$$

En conséquence le premier groupe de termes est majoré par :

$$\frac{2\alpha\left(\sum_k N_k\right)}{\left[1 + \delta^2\left(\sum_k N_k\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \leqslant \frac{2\alpha}{\delta} .$$

Donc $\left|\frac{\partial \mathcal{G}_i}{\partial N_\beta}\right| \leqslant \frac{\alpha}{\delta}\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \leqslant 4\frac{\alpha}{\delta}$.

On considère le problème de Cauchy pour le système aux dérivées partielles des équations cinétiques modifiées (77). Des conditions initiales régulières $N_i(x, 0)$ sont données sur le segment $\mathcal{S}_0$ de l'axe des x ; $N_i(x, 0)$ est strictement positif pour tout i . D'après le théorème rappelé au début de ce paragraphe et complété de la remarque, et d'après la majoration (79) on peut construire une solution régulière dans le triangle $T_{\mathcal{S}_0}$ entier (ici les lignes caractéristiques sont les droites $x - u_i t = \text{ctte}$) moyennant la condition que la majoration (79) ait constamment lieu. Cela veut dire moyennant que les densités $N_i(x, t)$ demeurent toutes positives lorsque t croît; pour t petit $N_i(x, t)$ est strictement positif pour tout i , comme $N_i(x, 0)$ en vertu de la continuité de la solution. Dans le paragraphe suivant on va démontrer que $N_i(x, t)$ demeure positif dans le triangle $T_{\mathcal{S}_0}$.



2 - Le problème de Cauchy pour les équations cinétiques modifiées admet une solution unique.

La démonstration que l'on va faire généralise celle proposée par Godunov et Sultangazin [21]. On fait l'hypothèse qu'il existe un nombre Δ tel que

$$N_i(x, 0) > \Delta > 0 \qquad \forall x \in \mathcal{S}_0 , \quad \forall i \in (1, 2, \ldots, p).$$

a) Etablissement de quelques inégalités

On pose (dans tout ce qui suit les $N_i(x,t)$ sont supposés positifs) :

$$V(t) = \sup_{x \in \mathcal{S}_t,\ i \in (1,2,\ldots,p)} N_i(x,t) \tag{80}$$

$\mathcal{S}_t$ est le segment d'ordonnée t contenu dans $T_{\mathcal{S}_0}$.

D'après l'inégalité (78) et compte tenu de la définition de g_i donnée en (77) on a :

$$|g_i| \leq \frac{1}{2}\frac{\alpha\sqrt{2}}{\delta}\Big(\sum_k N_k\Big) \leq \frac{1}{2}\frac{\alpha\sqrt{2}}{\delta}\, p \sup_{\substack{x \in \mathcal{S}_t \\ i \in (1,2,\ldots,p)}} N_i(x,t)$$

soit :

$$|g_i| \leq \alpha^* V(t) \qquad \text{avec} \qquad \alpha^* = \frac{1}{2}\frac{\alpha\sqrt{2}}{\delta}\, p \ . \tag{81}$$

On intègre la $i^{\text{ème}}$ équation du système (77) le long de la droite caractéristique $x - u_i t = \text{ctte}$:

$$N_i(x,t) = N_i(x - u_i t\ ,\ 0) + \int_0^t g_i(x - u_i(t-\tau),\tau)\,d\tau$$

d'où :

$$N_i(x,t) \leq N_i(x - u_i t\ ,\ 0) + \alpha^* \int_0^t V(\tau)\,d\tau \ .$$

Comme $\sup_{x \in \mathcal{S}_t} N_i(x - u_i t\ ,\ 0) \leq \sup_{x \in \mathcal{S}_0} N_i(x,0)$, en prenant le sup de l'inégalité précédente pour $x \in \mathcal{S}_t$ et pour $i \in (1,2,\ldots,p)$ il vient :

$$V(t) \leq V(0) + \alpha^* \int_0^t V(\tau)\,d\tau \ .$$

Lemme. Soit $F(t)$ une fonction continûment dérivable telle que $F(0) = F'(0) = 0$, $F'(t) \leq \alpha^* F(t)$ $(\alpha^* > 0)$, alors pour $t > 0$ on a $F(t) \leq 0$.

Ce lemme est une conséquence du théorème de Rolle. On l'applique ici à la fonction

$$F(t) = \int_0^t (V(\tau) - e^{\alpha^* \tau} V(0))\,d\tau \ .$$

$$(82) \qquad V(t) \leq V(0)\, e^{\alpha^* t} \qquad t \geq 0 .$$

Comme conséquence de (80) et (82) on peut écrire :

$$(83) \quad \begin{cases} N_i(x,t) \leq V(t) \leq V(0)\, e^{\alpha^* t} \\ \sum_i N_i(x,t) \leq p\, V(t) \leq p\, V(0)\, e^{\alpha^* t} \end{cases} \qquad \text{pour } t \geq 0, \quad x \in \mathcal{S}_t$$

D'après la définition de g_i donnée en (77) on a :

$$g_i = \frac{1}{2} \frac{\sum_{j,k,l} (A^{ij}_{kl} N_k N_l - A^{kl}_{ij} N_i N_j)}{\left[1 + \delta^2 (\sum_k N_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \geq -\frac{1}{2} \frac{\sum_j (\sum_{k,l} A^{kl}_{ij}) N_i}{\left[1 + \delta^2 (\sum_k N_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}} N_i$$

Dans la dernière expression on majore N_j par $V(t)$ comme indiqué en (83) et $\sum_{k,l} A^{kl}_{ij}$ par α, et on minore le dénominateur par 1.

$$g_i \geq -\frac{1}{2} p \alpha V(t) N_i .$$

On considère maintenant l'équation pour N_i du système (77) et on utilise l'inégalité précédente :

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial N_i}{\partial x} \geq -\frac{1}{2} p \alpha V(t) N_i .$$

Intégrons cette inégalité le long de la droite caractéristique $x - u_i t = \text{ctte}$

$$(84) \qquad N_i(x,t) \geq N_i(x - u_i t, 0) \exp\left\{-\frac{1}{2} p \alpha \int_0^t V(\tau) d\tau\right\} .$$

b) $N_i(x,t)$ est strictement positif dans $T_{\mathcal{S}_0}$.

$N_i(x,t)$ est positif pour t petit, pour tout i et tout $x \in \mathcal{S}_t$. Soit t_0 le premier instant où l'un des $N_i(x,t)$ s'annule ; autrement dit :

$$(85) \quad \begin{cases} N_i(x,t) > 0 \qquad \forall i \in (1, 2, \ldots, p), \forall x \in \mathcal{S}_t, \quad \forall t < t_0 \\ \exists\, i_0 \in (1, 2, \ldots, p) \text{ et } \exists\, x_0 \in \mathcal{S}_{t_0} \text{ tels que } N_{i_0}(x_0, t_0) = 0 . \end{cases}$$

On considère l'inégalité (84) pour la densité N_{i_0} qu'il est légitime d'écrire pour $t < t_0$ et on se rappelle l'hypothèse sur les $N_i(x,0)$ faite au début de ce paragraphe F-2 :

$$N_{i_0}(x\,,\,t) \;\geqslant\; \Delta\,\exp\left\{-\frac{1}{2}\,p\,\alpha\int_0^t V(\tau)d\tau\right\}\;.$$

En $t = t_0$ et $x = x_0$ cette inégalité conduit à $N_{i_0}(x_0\,,\,t_0) > 0$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse (85). Les $N_i(x\,,\,t)$ sont donc strictement positifs dans $T_{\mathcal{S}_0}$.

c) Remarques

Soit T l'ordonné du sommet du triangle $T_{\mathcal{S}_0}$; à l'intérieur de $T_{\mathcal{S}_0}$ les densités satisfont, compte tenu de (82), (83), (84) et de ce que $N_i(x\,,\,0) > \Delta$ pour tout $i = 1, \ldots, p$ et $\forall x$ de $\mathcal{S}_0$, à :

$$(86)\qquad \begin{cases} N_i(x\,,\,t) \;\leqslant\; V(0)\,e^{\alpha^* t} \;\leqslant\; V(0)\,e^{\alpha^* T} \\ N_i(x\,,\,t) \;\geqslant\; \Delta\,\exp\left\{-\dfrac{\delta\sqrt{2}}{2}V(0)\,e^{\alpha^* t}\right\} \;\geqslant\; \Delta\,\exp\left\{-\dfrac{\delta\sqrt{2}}{2}V(0)\,e^{\alpha^* T}\right\}. \end{cases}$$

Dans le triangle $T_{\mathcal{S}_0}$ les densités N_i sont donc bornées et ne s'annulent jamais.

Si enfin on considère le système des équations cinétiques modifiées dans lequel on a introduit un petit paramètre ϵ comme dans le paragraphe B-1, à savoir :

$$(87)\qquad \frac{\partial N_i}{\partial t} + u_i\,\frac{\partial N_i}{\partial x} \;=\; \frac{1}{\epsilon}\,g_i$$

les solutions $N_i(x\,,\,t)$ de ce système existent dans le triangle $T_{\mathcal{S}_0}$ et vérifient :

$$(88)\qquad \begin{cases} N_i(x\,,\,t) \;\leqslant\; V(0)\,e^{\frac{\alpha^*}{\epsilon}t} \;\leqslant\; V(0)\,e^{\frac{\alpha^*}{\epsilon}T} \\ N_i(x\,,\,t) \;\geqslant\; \Delta\,\exp\left\{-\dfrac{\delta\sqrt{2}}{2}V(0)\,e^{\frac{\alpha^*}{\epsilon}t}\right\} \;\geqslant\; \Delta\,\exp\left\{-\dfrac{\delta\sqrt{2}}{2}V(0)\,e^{\frac{\alpha^*}{\epsilon}T}\right\} \end{cases}$$

avec $\alpha = \underset{i,j}{\mathrm{Sup}}\left(\sum_{k,l} A_{ij}^{kl}\right)$ $\qquad \alpha^* = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,p\,\dfrac{\alpha}{\delta}$.

La manière dont figure ϵ et t dans ces bornes fait qu'elles ne sont pas très intéressantes.

G - UNE INEGALITE DEDUITE DU THEOREME H

On considère ici le système (87)

$$(89)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial N_i}{\partial t} + u_i \dfrac{\partial N_i}{\partial x} = \dfrac{1}{\epsilon}\, g_i = \dfrac{1}{2\epsilon} \dfrac{\sum\limits_{j,k,l} (A_{kl}^{ij} N_k N_l - A_{ij}^{kl} N_i N_j)}{\left[1 + \delta^2 (\sum\limits_k N_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \\ \\ i = 1, 2, \ldots, p. \end{cases}$$

Ce système diffère du système des équations cinétiques réelles par la présence du dénominateur $\left[1 + \delta^2 (\sum\limits_k N_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ dans g_i. On a les mêmes équations de conservation (I -(29)) pour le système des équations cinétiques modifiées que pour les équations cinétiques réelles; le théorème H est légèrement modifié car

$$(\text{Log } N, g(N, N)) = \left[1 + \delta^2 (\sum_k N_k)^2\right]^{-\frac{1}{2}} (\text{Log } N, \mathcal{F}(N, N)) .$$

Théorème. On se donne des conditions initiales régulières, périodiques en x de période L : $N_i(x + L, 0) = N_i(x, 0)$. On pose

$$R_0 = \int_0^L (\sum_i N_i(x, 0))dx$$

$$S_0 = \int_0^L (\sum_i N_i(x, 0) \text{ Log } N_i(x, 0))dx .$$

On considère la solution $N_i(x, t)$ des équations (89) sur le rectangle $x \in [0, L]$ $t \in [0, T]$ et on a :

$$(90)\qquad \sqrt{A_{ij}^{kl}} \int_0^T \int_0^L \left|\sqrt{N_i N_j} - \sqrt{N_k N_l}\right| dx\, dt \leqslant \left\{4 \left(\frac{pL}{e} + S_0\right)\left(\sqrt{1 + \delta^2}L + \delta R_0\right)T\right\}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\epsilon} .$$

Godunov et Sultangazin [21] ont démontré une inégalité semblable dans le cas d'un modèle spatial à 6 vitesses, et ici on donne une généralisation au cas du modèle général de gaz à répartition discrète de vitesses. Il faut bien noter que l'inégalité (90) que l'on va démontrer est une conséquence du théorème H.

D'après le paragraphe F précédent le système (89) admet une solution unique sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$ (on fait en sorte que ce rectangle soit contenu dans un triangle $T_{\mathcal{E}_0}$). La solution exhibée ici est périodique en x de période L car les équations (89) le sont ainsi que les conditions initiales.

Multiplions la $i^{ème}$ équation de (89) par $(1 + \text{Log } N_i)$ et sommons en i, d'où :

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\sum_i N_i \text{ Log } N_i\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\sum_i u_i N_i \text{ Log } N_i\Big) = \frac{1}{\epsilon}(\text{Log } N, \mathcal{G}(N, N)).$$

On intègre ensuite sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$. Le second terme du premier membre donne 0 par suite des propriétés de périodicité. Quant au premier terme, comme $a \text{ Log } a \geqslant -\frac{1}{e}$ pour tout $a > 0$ on a :

$$\int_0^L dx \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\Big(\sum_i N_i \text{ Log } N_i\Big)dt = \int_0^L \Big\{\sum_i N_i(x, T) \text{ Log } N_i(x, T) - \sum_i N_i(x, 0) \text{ Log } N_i(x, 0)\Big\} dx \geqslant -\frac{pL}{e} - S_0 .$$

D'où :

$$(91) \qquad -\int_0^T \int_0^L (\text{Log } N, \mathcal{G}(N, N))dx\, dt \leqslant \Big(\frac{pL}{e} + S_0\Big)\epsilon .$$

On sait d'après (I -34a) et (I-34b) qu'on a avec l'hypothèse I de microréversibilité :

$$(\text{Log } N, \mathcal{G}(N, N)) = \frac{1}{8}\Big\{\sum_{i,j,k,l} A_{ij}^{kl} \text{ Log } \frac{N_i N_j}{N_k N_l}(N_k N_l - N_i N_j)\Big\}\Big[1 + \delta^2\Big(\sum_k N_k\Big)^2\Big]^{-\frac{1}{2}}$$

et avec l'hypothèse II du bilan semi détaillé :

$$(\text{Log } N, \mathcal{G}(N, N)) = \frac{1}{4}\Big\{\sum_{i,j,k,l} A_{ij}^{kl}\Big(N_i N_j \text{ Log } \frac{N_k N_l}{N_i N_j} + N_i N_j - N_k N_l\Big)\Big\}\Big[1 + \delta^2\Big(\sum_k N_k\Big)^2\Big]^{-\frac{1}{2}}.$$

Comme tous les termes dans chacune de ces deux dernières expressions sont positifs on a comme conséquence de (91) :

$$(92)\begin{cases} \text{avec Hyp.I} : A_{ij}^{kl}\displaystyle\int_0^T\int_0^L \text{Log } \frac{N_i N_j}{N_k N_l}(N_k N_l - N_i N_j)\Big[1 + \delta^2\Big(\sum_k N_k\Big)^2\Big]^{-\frac{1}{2}} dx\, dt \leqslant 8\Big(\frac{pL}{e} + S_0\Big)\epsilon \\ \text{avec Hyp.II} : A_{ij}^{kl}\displaystyle\int_0^T\int_0^L \Big(N_i N_j \text{Log } \frac{N_k N_l}{N_i N_j} + N_i N_j - N_k N_l\Big)\Big[1 + \delta^2\Big(\sum_k N_k\Big)^2\Big]^{-\frac{1}{2}} dx\, dt \\ \qquad\qquad \leqslant 4\Big(\frac{pL}{e} + S_0\Big)\epsilon . \end{cases}$$

Lemme. Quels que soient a et b positifs on a :

$$\text{Log } \frac{a}{b}\,(a-b) \geqslant 2(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$$

$$a \text{ Log } \frac{a}{b} + b - a \geqslant (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \quad .$$

On étudie les variations des fonctions de la variable z : $(a-z^2)\,\text{Log}\,\frac{a}{z^2} - 2(\sqrt{a}-z)^2$ et $a\,\text{Log}\,\frac{a}{z^2} + (z^2-a) - (\sqrt{a}-z)^2$. Toutes deux décroissent de $+\infty$ à 0 quand z croît de 0 à $\sqrt{a}$, et croissent de 0 à $+\infty$ quand z croît de $\sqrt{a}$ à $+\infty$. Le lemme est donc démontré.

On déduit du lemme et de (92)

$$(93) \qquad A_{ij}^{kl} \int_0^T \int_0^L \frac{(\sqrt{N_i\,N_j} - \sqrt{N_k\,N_l})^2}{\left[1 + \delta^2 (\sum_k N_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}} dx\,dt < 4\left(\frac{pL}{e} + S_0\right)\varepsilon \quad .$$

On écrit l'inégalité de Schwarz pour les fonctions $\left[1 + \delta^2 (\sum_k N_k)^2\right]^{\frac{1}{4}}$ et $\left|\sqrt{N_i\,N_j} - \sqrt{N_k\,N_l}\right| \left[1 + \delta^2 (\sum_k N_k)^2\right]^{-\frac{1}{4}}$:

$$(94) \qquad \int_0^T \int_0^L \left|\sqrt{N_i\,N_j} - \sqrt{N_k\,N_l}\right| dx\,dt \leqslant \left\{\int_0^T \int_0^L \frac{(\sqrt{N_i\,N_j} - \sqrt{N_k\,N_l})^2}{\left[1 + \delta^2 (\sum_k N_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}} dx\,dt\right\}^{\frac{1}{2}} .$$

$$\left\{\int_0^T \int_0^L \left[1 + \delta^2 (\sum_k N_k)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx\,dt\right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Mais $\left[1 + \delta^2 (\sum_k N_k)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{1+\delta^2} + \delta(\sum_k N_k)$.

$\int_0^L (\sum_k N_k)dx$ est une fonction indépendante de t ; en effet :

$$\frac{d}{dt}\int_0^L (\sum_k N_k)dx = \int_0^L \frac{\partial}{\partial t}(\sum_k N_k)dx = -\int_0^L \frac{\partial}{\partial x}(\sum_k u_k N_k) = 0$$

la seconde égalité est une conséquence de l'équation de la conservation de la masse et la dernière provient des hypothèses de périodicité. Donc :

$$\int_0^T \int_0^L \left[1 + \delta^2 (\sum_k N_k)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx\,dt \leqslant \int_0^T \int_0^L \left[\sqrt{1+\delta^2} + \delta(\sum_k N_k)\right] dx\,dt$$

$$\leqslant \sqrt{1+\delta^2}\; T\,L + \delta\,T\,R_0$$

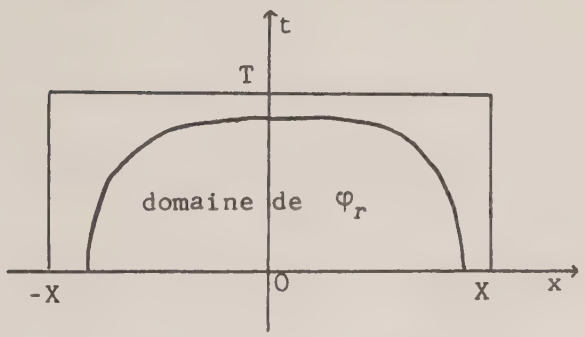
(9C) résulte de cette dernière égalité, de (93) et de (94).

Remarque. Ce théorème fournit une estimation de l'intégrale de $\left|\sqrt{N_i\, N_j} - \sqrt{N_k\, N_l}\right| \sqrt{A_{i\,j}^{k\,l}}$ sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$ de l'ordre de $\sqrt{\varepsilon}$. Ceci donne une indication pour le problème de savoir si l'état microscopique de densités N_i est proche d'un état maxwellien.

Conséquence du théorème. On considère la solution du problème de Cauchy dans le rectangle $[-X, X] \times [0, T]$; soit $N_i(x, t)$ cette solution. En chaque point (x, t) on a donc un état microscopique de densités $N_i^{(0)}$ auquel est associé un état maxwellien de densités $N_i^{(0)}$. On va essayer de voir de quelle manière cet état maxwellien vérifie les équations de conservation du milieu.

N_i est solution de (89), donc est solution des équations de conservation (I-(29)) :

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\sum_i N_i\, V_{\alpha i}\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\sum_i u_i\, N_i\, V_{\alpha i}\Big) = 0 \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, q.$$



Soient q fonctions régulières $\varphi_\alpha(x, t)$ nulles sur les bords $x = \pm X$, $t = T$ du rectangle.

On multiplie les q équations de conservation respectivement par ces q fonctions et on intègre sur le rectangle.

$$\int_{-X}^{X}\int_{0}^{T} \varphi_\alpha\, \frac{\partial}{\partial t}\Big(\sum_i N_i\, V_{\alpha i}\Big)\, dx\, dt + \int_{-X}^{X}\int_{0}^{T} \varphi_\alpha\, \frac{\partial}{\partial x}\Big(\sum_i u_i\, N_i\, V_{\alpha i}\Big) dx\, dt = 0$$

d'où

$$\int_{-X}^{X}\int_{0}^{T} \Big(\sum_i N_i\, V_{\alpha i}\Big)\, \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial t}\, dx\, dt + \int_{-X}^{X}\int_{0}^{T} \Big(\sum_i u_i\, N_i\, V_{\alpha i}\Big)\, \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x}\, dx\, dt$$

$$+ \int_{-X}^{X} \Big(\sum_i N_i(x, 0) V_{\alpha i}\Big)\, \varphi_\alpha(x, 0)\, dx = 0 .$$

L'état maxwellien associé a les mêmes grandeurs macroscopiques donc

$$(95) \qquad \int_{-X}^{X}\int_{0}^{T} \Big(\sum_i N_i^{(0)} V_{\alpha i}\Big)\, \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial t}\, dx\, dt + \int_{-X}^{X}\int_{0}^{T} \Big(\sum_i u_i\, N_i^{(0)} V_{\alpha i}\Big)\, \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x}\, dx\, dt$$

$$+ \int_{-X}^{X} \Big(\sum_i N_i^{(0)}(x, 0) V_{\alpha i}\Big)\, \varphi_\alpha(x, 0)\, dx = \int_{-X}^{X}\int_{0}^{T} \sum_i u_i (N_i^{(0)} - N_i)\, V_{\alpha i}\, \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x}\, dx\, dt .$$

On appelle $\mathcal{E}$ le second membre. La manière dont l'état maxwellien vérifie les équations de conservation du milieu est données par (95). Si $\mathcal{E} = 0$ l'état maxwellien est solution des équations de conservation, si $\mathcal{E} \neq 0$ l'état maxwellien est solution des équations de conservation avec une certaine approximation donnée par $\mathcal{E}$.

Dans le cas particulier du modèle plan régulier à 2r vitesses de même module les coefficients α_l étant supposés tous non nuls (I - § E-2) cette estimation est aisée à faire car on possède les inégalités (74) et (90).

$$|\mathcal{E}| \leq \int_{-X}^{X} \int_{0}^{T} \sum_{l} |u_l \, V_{\alpha l}| \cdot \left| N_l^{(0)} - N_l \right| \cdot \operatorname*{Max}_{x,\,t} \left| \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x} \right| dx \, dt$$

$$\leq \operatorname*{Max}_{x,t} \left| \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x} \right| \cdot \sum_{l} (u_l \, V_{\alpha l}) \sum_{l=1}^{r} \int_{-X}^{X} \int_{0}^{T} \left| \sqrt{N_l \, N_{l+r}} - \sqrt{N_l N_{l+r}} \right| dx \, dt$$

$$\leq \operatorname*{Max}_{x,t} \left| \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x} \right| \cdot \sum_{l} |u_l \, V_{\alpha l}| \cdot \sum_{l=1}^{r} (A_{l \; l+r}^{l \; l+r})^{-\frac{1}{2}} \; \frac{X+L}{L} \left\{ 4\left(\frac{pL}{e} + S_0\right)\left(\sqrt{1+\delta^2}\, L + \delta R_0\right) T \right\}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\epsilon}$$

$$\leq C_2 \sqrt{\epsilon} \; .$$

L'état maxwellien est une solution approchée des équations de conservation du milieu, au sens décrit par (95), avec une approximation en $\sqrt{\epsilon}$.

L'évaluation du second membre $\mathcal{E}$ de (95) dans le cas du modèle général d'un gaz à répartition discrète de vitesses n'a pas été faite . Il manque pour cela une inégalité analogue à (74). L'inégalité (72) est insuffisante car la constante précédent le facteur $\sum_{i,j,k,l} A_{ij}^{kl} \left| \sqrt{N_i \, N_j} - \sqrt{N_k \, N_l} \right|$ dépend de μ et M, bornes inférieure et supérieure des N_l . Et dans le cas présent ces bornes μ et M, qui existent et peuvent être déduites de (88), dépendent de ϵ ; de plus μ tend vers 0 et M vers l'infini quand ϵ tend vers 0.

CHAPITRE III

ETUDE DES ONDES DE CHOC DANS UN MILIEU A REPARTITION DISCRETE DE VITESSES

Avec la méthode de Chapman-Enskog valable pour un gaz suffisamment raréfié, on a vu qu'en première approximation le milieu est décrit par les variables d'état macroscopique, celles-ci vérifiant les équations d'Euler : on va s'intéresser à ce système d'équations et notamment démontrer qu'il est hyperbolique.

Par ailleurs l'hypothèse de microréversibilité pour les probabilités de transition étant vérifiée, en linéarisant le système des équations cinétiques exactes au voisinage d'un état maxwellien, on obtient une équation aux dérivées partielles linéaire s'écrivant comme une somme d'opérateurs d'ordre p, $p-1$, ..., q ; les vitesses caractéristiques de l'opérateur d'ordre α sont réelles et séparent les vitesses caractéristiques réelles de l'opérateur d'ordre $\alpha+1$. Cette propriété redonne le caractère hyperbolique du système des équations d'Euler.

La propagation des ondes de choc faibles est étudiée dans le milieu sans dissipation à partir des équations d'Euler et par application des conditions de stabilité de Lax, et aussi dans le milieu avec dissipation à partir des équations exactes et par application des conditions nécessaires d'existence d'une structure de choc. La compatibilité des résultats provient de la séparation des vitesses caractéristiques pour les opérateurs d'ordre q et $q+1$.

A LES VITESSES CARACTERISTIQUES DU SYSTEME DES EQUATIONS D'EULER

1 - Le système des équations d'Euler; les vitesses caractéristiques de ce système.

On rappelle que les p équations cinétiques pour un gaz à répartition discrète de vitesses s'écrivent (I-(13)) :

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \mathcal{A} N = \mathcal{F}(N, N). \tag{1}$$

On se limite dans tout ce chapitre à des problèmes unidimensionnels dans la direction des x, si bien que la matrice diagonale $\mathcal{A}$ a pour élément non nul dans la $i^{ème}$ ligne $u_i \frac{\partial}{\partial x}$. On rappelle que dans $\mathbf{F}$ et dans $\mathbb{R}^p$ on a introduit des bases orthonormées $V_1, \ldots, V_q$ et $V_1, \ldots, V_q, W_{q+1}, \ldots, W_p$ et que l'on écrit (I-(24))

$$N = \sum_{i=1}^{q} a_i V_i + \sum_{j=q+1}^{p} b_j W_j \quad . \tag{2}$$

En multipliant scalairement (1) respectivement par $V_1, \ldots, V_q, W_{q+1}, \ldots, W_l$ il apparaît en particulier les expressions suivantes :

$$(\mathcal{A}N, V_k) = \sum_m u_m (\frac{\partial}{\partial x} N_m) V_{km} = \sum_{i=1}^{q} (\sum_m u_m V_{im} V_{km}) \frac{\partial a_i}{\partial x} + \sum_{i=q+1}^{p} (\sum_m u_m W_{im} V_{km}) \frac{\partial b_i}{\partial x}$$

$$(\mathcal{A}N, W_l) = \sum_{i=1}^{q} (\sum_m u_m V_{im} W_{lm}) \frac{\partial a_i}{\partial x} + \sum_{i=q+1}^{p} (\sum_m u_m W_{im} W_{lm}) \frac{\partial b_i}{\partial x}$$

$$(\mathcal{F}(N, N), W_l) = \sum_{i=1}^{q} \sum_{h=1}^{q} a_i a_h (\mathcal{F}(V_i, V_h), W_l) +$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=q+1}^{p} a_i b_j (\mathcal{F}(V_i, W_j), W_l) + \sum_{j=q+1}^{p} \sum_{k=q+1}^{p} b_j b_k (\mathcal{F}(W_j, W_k), W_l)$$

$$= Q_l(a_i, b_j)$$

$Q_l(a_i, b_j)$ est une forme quadratique par rapport aux a_i et b_j. On introduit diverses matrices constantes à savoir $\mathbb{L}$, $\mathbb{M}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{K}$ de type (q, q), (q, p - q), (p - q, q), (p - q, p - q) respectivement, dont les éléments de la $k^{ème}$ ligne et

de la $i^{ème}$ colonne sont

$$(3)\quad \begin{cases} L_{ki} = \sum_m u_m V_{im} V_{km} \quad , \quad M_{ki} = \sum_m u_m W_{im} V_{km} \\ H_{ki} = \sum_m u_m V_{im} W_{km} \quad , \quad K_{ki} = \sum_m u_m W_{im} W_{km} \end{cases}$$

$\mathbb{L}$ et $\mathbb{K}$ sont symétriques, $\mathbb{M} = \mathbb{H}^T$

On note par A la suite $(a_1, \ldots, a_q)$ et par B la suite $(b_{q+1}, \ldots, b_p)$ en mettant en évidence les variables liées à la description macroscopique du milieu et celles liées à la description microscopique. $Q(A, B)$ est la suite des quantités $Q_l(a_i, b_j)$, $l = q+1, \ldots, p$, (aucune n'est identiquement nulle).

Le système d'équations équivalent à (1) obtenu par multiplication scalaire de (1) par $V_1, \ldots, V_q$, $W_{q+1}, \ldots, W_p$, respectivement, s'écrit par suite :

$$(4)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} a_k + \sum_{i=1}^{q} L_{ki} \frac{\partial a_i}{\partial x} + \sum_{j=q+1}^{p} M_{kj} \frac{\partial b_j}{\partial x} = 0 \qquad k = 1, \ldots, q, \\ \frac{\partial}{\partial t} b_l + \sum_{i=1}^{q} H_{li} \frac{\partial a_i}{\partial x} + \sum_{j=q+1}^{p} K_{lj} \frac{\partial b_j}{\partial x} = Q_l(a_i, b_j) \quad l = q+1, \ldots, p. \end{cases}$$

ou encore sous forme condensée les équations cinétiques exactes s'écrivent :

$$(5)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} A + \mathbb{L} \frac{\partial}{\partial x} A + \mathbb{M} \frac{\partial}{\partial x} B = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} B + \mathbb{H} \frac{\partial}{\partial x} A + \mathbb{K} \frac{\partial}{\partial x} B = Q(A, B). \end{cases}$$

Le système des équations d'Euler est la première des équations (5) pour l'inconnue A dans laquelle B a une expression bien déterminée en fonction de A à savoir celle correspondant à un état maxwellien (II-(19)). On rappelle qu'étant donné A, on lui associe un seul état maxwellien, c'est à dire un seul B (I - § D-2); comme $\mathcal{F}(N, N) = 0$ implique et réciproquement $Q(A, B) = 0$, B est la solution unique, compte tenu du fait que les densités associées doivent être positives, de $Q(A, B) = 0$.

Le système des équations d'Euler s'écrit :

$$(6)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} A + \mathbb{L} \frac{\partial}{\partial x} A + \mathbb{M} \frac{\partial}{\partial x} B = 0 \\ Q(A, B) = 0. \end{cases}$$

B est une fonction régulière de A dans (6), et par dérivation de $Q_l(A, B) = 0$ on a :

$$\frac{\partial Q_l}{\partial a_i} + \sum_{j=q+1}^{p} \frac{\partial Q_l}{\partial b_j} \frac{\partial b_j}{\partial a_i} = 0$$

avec, en utilisant l'expression de $Q_l(A, B)$:

$$\frac{\partial Q_l}{\partial a_i} = 2\,(\mathcal{F}(V_i, N), W_l) \quad , \qquad \frac{\partial Q_l}{\partial b_j} = 2\,(\mathcal{F}(W_j, N), W_l) \ .$$

On introduit les matrices de type $(p-q, q)$, $(p-q, p-q)$ et $(p-q, q)$ notées par $\mathcal{U}$, $\mathcal{W}$ et $\mathbb{B}$ dont les éléments de la $k^{ième}$ ligne et de la $i^{ème}$ colonne sont respectivement $U_{ki} = (\mathcal{F}(V_i, N), W_k)$, $W_{kl} = (\mathcal{F}(W_l, N), W_k)$ et $\frac{\partial b_k}{\partial a_i}$. On a donc $\mathcal{U} + \mathcal{W}\mathbb{B} = 0$ soit :

$$\mathbb{B} = -\mathcal{W}^{-1}\mathcal{U} \tag{7}$$

la matrice $\mathcal{W}$ étant naturellement régulière. En effet les $p-q$ vecteurs colonnes de $\mathcal{W}$ sont linéairement indépendants car $\sum_{i=q+1}^{p} \lambda_i\ (\mathcal{F}(W_i, N), W_k) = 0$ pour $k = q+1, \ldots, p$ s'écrit $(\mathcal{F}(\sum_{i=q+1}^{p} \lambda_i\ W_i, N), W_k) = 0$ ce qui signifie $\mathcal{F}(\sum_{i=q+1}^{p} \lambda_i\ W_i, N) = 0$. N représente les densités d'un état maxwellien et cette égalité d'après le corollaire de (II - § A-2) entraîne $\sum_{i=q+1}^{p} \lambda_i\ W_i = 0$ soit $\lambda_l = 0$ pour tout $i = q+1, \ldots, p$.

Le système des équations d'Euler s'écrit donc aussi sous la forme

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} A + (\mathbb{L} - \mathbb{M}\mathcal{W}^{-1}\mathcal{U}) \dfrac{\partial}{\partial x} A = 0 \\ \\ Q(A, B) = 0 \ . \end{cases} \tag{8}$$

Vitesses caractéristiques du système des équations d'Euler : ce sont les nombres ξ solutions de :

$$\text{dét}\,[-\xi\ \mathbb{1}_q + \mathbb{L} - \mathbb{M}\mathcal{W}^{-1}\mathcal{U}] = 0 \ . \tag{9}$$

La matrice $\mathbb{L} - \mathbb{M}\mathcal{W}^{-1}\mathcal{U}$ n'est pas en général symétrique comme on peut s'en convaincre en examinant, dans le cas particulier donné dans (II - § B-2), les équations d'Euler c'est à dire les équations (II - (24)) avec $\mathbb{P}$ remplacé par $\mathbb{P}^{(0)}$ (II - (34)). Sans étude supplémentaire on ne peut conclure au caractère hyperbolique du système (8). Mais si au lieu de prendre $a_1, \ldots, a_q$ comme

fonctions inconnues dans le système (6) on prend les quantités $c_1, \ldots, c_q$ définies par les relations (I-(37)) le nouveau système obtenu est facile à étudier. On a :

$$a_k = \sum_i N_i V_{ki} = \sum_i \exp\left(\sum_{l=1}^{q} c_l V_{li}\right) V_{ki}$$

$$b_k = \sum_i N_i W_{ki} = \sum_i \exp\left(\sum_{l=1}^{q} c_l V_{li}\right) W_{ki}$$

(6) s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left\{\sum_i \exp\left(\sum_{l=1}^{q} c_l V_{li}\right) V_{ki}\right\} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\sum_i \exp\left(\sum_{l=1}^{q} c_l V_{li}\right) u_i V_{ki}\right\} = 0 . \\ k = 1, 2, \ldots, q. \end{cases}$$

Ceci s'écrit encore sous les deux formes :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_k}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial c_k}\right) = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots, q.$$

(10)
$$\sum_{s=1}^{q} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial c_k \partial c_s} \frac{\partial c_s}{\partial t} + \sum_{s=1}^{q} \frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial c_k \partial c_s} \frac{\partial c_s}{\partial x} = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots, q.$$

avec $\mathcal{L} = \sum_i \exp\left(\sum_{l=1}^{q} c_l V_{li}\right)$ et $\mathcal{M} = \sum_i u_i \exp\left(\sum_{l=1}^{q} c_l V_{li}\right)$.

Le système (10) est écrit sous forme symétrique, les deux matrices $\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial c_k \partial c_s}\right)$ et $\left(\frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial c_k \partial c_s}\right)$ l'étant ; de plus la première matrice est définie positive car elle est identique à la matrice jacobienne (I-(40)) des relations (I-(37)). En conséquence le système (10) est hyperbolique.

Conclusion. Le système des équations d'Euler est hyperbolique.

2 - Les vitesses de propagation des ondes de choc infiniment faibles.

On revient aux équations exactes (5) et on étudie la structure d'une onde de choc c'est à dire la solution de (5) dans laquelle les fonctions inconnues A et B ne dépendent que de la variable $\eta = x - \xi t$, ξ constant. On obtient les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} (-\xi\, \mathbb{1}_q + \mathbb{L})\, \dfrac{dA}{d\eta} + \mathbb{M}\, \dfrac{dB}{d\eta} = 0 \\ (-\xi\, \mathbb{1}_{p-q} + \mathbb{K})\, \dfrac{dB}{d\eta} + \mathbb{H}\, \dfrac{dA}{d\eta} = Q(A, B). \end{cases}$$

On note pour $\mathbb{\Lambda}$ la matrice inverse de $(-\xi\, \mathbb{1}_q + \mathbb{L})$ qu'on suppose exister (autrement dit on élimine les valeurs de ξ qui seraient valeurs propres de $\mathbb{L}$) et par Λ_{kl} l'élément de la $k^{ième}$ ligne et de la $i^{ième}$ colonne de $\mathbb{\Lambda}$. La première équation s'intègre et on peut écrire une équation unique pour B :

$$(11) \qquad A = A^{(1)} - \mathbb{\Lambda}\mathbb{M}(B - B^{(1)})$$

$$(12) \qquad (-\xi\, \mathbb{1}_{p-q} + \mathbb{K} - \mathbb{H}\mathbb{\Lambda}\mathbb{M})\, \frac{dB}{d\eta} = Q(A^{(1)} - \mathbb{\Lambda}\mathbb{M}(B - B^{(1)}), B) \cdot$$

$A^{(1)}$ et $B^{(1)}$ sont les valeurs de A et B dans un état maxwellien dit état 1. L'équation (12) représente en fait $p - q$ équations scalaires pour les $p - q$ composantes de B si $(-\xi\, \mathbb{1}_{p-q} + \mathbb{K} - \mathbb{H}\mathbb{\Lambda}\mathbb{M})$ est une matrice régulière.

Le point $B = B^{(1)}$ est un point singulier de l'équation (12), les autres points singuliers de (12) sont les points $B^{(2)}$ distincts de $B^{(1)}$ solution de $Q(A^{(1)} - \mathbb{\Lambda}\mathbb{M}(B^{(2)} - B^{(1)}), B^{(2)}) = 0$. On peut dire aussi que les points singuliers du système (11), (12) sont des couples $A^{(2)}, B^{(2)}$ tels que $A^{(2)} = A^{(1)} - \mathbb{\Lambda}\mathbb{M}(B^{(2)} - B^{(1)})$ et $Q(A^{(2)}, B^{(2)}) = 0$. Une solution $A^{(2)}, B^{(2)}$ distincte de $A^{(1)}, B^{(1)}$ peut exister ou non du point de vue algèbrique, et dans le cas de l'existence peut convenir ou non à notre problème, car les densités $N^{(2)}$ associées doivent être positives.

On s'intéresse aux solutions $B^{(2)}$ voisines de $B^{(1)}$. Si le jacobien des fonctions $Q(A^{(1)} - \mathbb{\Lambda}\mathbb{M}(B - B^{(1)}), B)$ par rapport aux variables B est nul pour $B = B^{(1)}$ alors les équations $Q(A^{(1)} - \mathbb{\Lambda}\mathbb{M}(B - B^{(1)}), B) = 0$ admettent la solution $B = B^{(1)}$ comme "solution double", (voir appendice III). Si le jacobien ci-dessus est "voisin de 0" alors les équations $Q(A^{(1)} - \mathbb{\Lambda}\mathbb{M}(B - B^{(1)}), B) = 0$ ont pour solution $B = B^{(1)}$ d'une part et $B = B^{(2)}$ "voisin" de $B^{(1)}$ d'autre part.

Plus précisément soient $A^{(1)}$ et $B^{(1)}$ donnés; on choisit $\xi = \xi_0$ tel que le jacobien défini ci-dessus soit nul, ξ y figure par l'intermédiaire de $\mathbb{\Lambda}$. Pour ξ voisin de ξ_0 ce jacobien n'est pas nul et les équations $Q(A^{(1)} - \mathbb{\Lambda}\mathbb{M}(B - B^{(1)}), B) = 0$ déterminent B comme fonction de $B^{(1)}$ et ξ. On a notamment l'existence de la solution $B = B^{(1)}$ et de la solution $B = B^{(2)}$ avec $B^{(2)}$ fonction continue de $B^{(1)}$ et ξ et possédant la propriété suivante : $B^{(2)}$ tend vers $B^{(1)}$ quand ξ tend vers ξ_0, (voir appendice III).

On s'intéresse ici à cette seconde solution; on a $A^{(2)}$ et $B^{(2)}$ voisins de $A^{(1)}$ et $B^{(1)}$. Les densités $N^{(1)}$ construites à partir de $A^{(1)}$ et $B^{(1)}$ sont positives (strictement positives) donc les densités $N^{(2)}$ construites à partir de $A^{(2)}$ et $B^{(2)}$ le sont également si on prend soin de choisir ξ assez voisin de ξ_o. Cette solution convient donc. L'état maxwellien de densité $N^{(2)}$ est dit état 2.

S'il existe une courbe intégrale de (12) joignant les points $B = B^{(1)}$ et $B = B^{(2)}$ on dira que les deux états maxwelliens 1 et 2 sont reliés par un choc infiniment faible. Ce choc se propage avec une vitesse voisine de ξ_o. On dira que ξ_o est la vitesse de déplacement dans le milieu 1 d'un choc infiniment faible.

Donc :

> Les vitesses de déplacement dans le milieu (1) des chocs infiniment faibles sont les valeurs de ξ rendant nul le jacobien des fonctions $Q(A^{(1)} - \Lambda M(B - B^{(1)}), B)$ par rapport aux variables B au point $B = B^{(1)}$.

Remarque.

Ces vitesses de déplacement sont à rechercher dans l'ensemble des réels auquel on enlève les zéros en ξ de dét $(\mathbb{1}_q - \xi \mathbb{L})$ et de dét$(-\xi \mathbb{1}_{p-q} + \mathbb{K} - H\Lambda M)$ et les zéros du jacobien défini ci-dessus qui conduisent à $B = B^{(1)}$ solution au moins triple et aussi les zéros doubles de ce jacobien (voir appendice III). L'ensemble des valeurs de ξ que l'on exclut est noté Cr.

Calculons le jacobien des fonctions $Q(A^{(1)} - \Lambda M(B - B^{(1)}), B)$ par rapport aux variables B au point $B = B^{(1)}$; notons le $\mathcal{J}$. De

$$a_l = a_i^{(1)} - \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=q+1}^{p} \Lambda_{ik} M_{kj} (b_j - b_j^{(1)})$$

et de

$$\frac{\partial Q_l(a_i, b_k)}{\partial b_j} = \sum_{i=1}^{q} 2(\mathcal{F}(V_i, N), W_l) \frac{\partial a_i}{\partial b_j} + 2(\mathcal{F}(W_j, N), W_l)$$

résulte :

$$\frac{\partial Q_l(a_i, b_k)}{\partial b_j} = -2 \sum_{i=1}^{q} \sum_{k=1}^{q} v_{li} \Lambda_{ik} M_{kj} + 2 W_{lj} .$$

Donc

$$\mathcal{J} = \text{dét}\left[-2 v^{(1)} \Lambda M + 2 W^{(1)} \right] . \tag{13}$$

$\mathcal{U}^{(1)}$ et $\mathcal{W}^{(1)}$ sont les matrices $\mathcal{U}$ et $\mathcal{W}$ définies dans le paragraphe A-1 et calculées dans l'état 1.

Conclusion. Les vitesses de déplacement des chocs infiniment faibles dans le milieu de densités N maxwelliennes sont les valeurs de ξ n'appartenant pas à Cr solution de :

$$(14) \qquad \text{dét}\,(\mathcal{W} - \mathcal{U} \wedge \mathbb{M}) = 0.$$

3 - Linéarisation des équations cinétiques exactes au voisinage d'un état maxwellien.

On considère le système des équations exactes (5) et on linéarise ce système au voisinage d'un état maxwellien constant caractérisé par $A^{(1)}$ et $B^{(1)}$:

$$A = A^{(1)} + A' \qquad B = B^{(1)} + B' \qquad A' \text{ et } B' \text{ petits}$$

$$(15) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} A' + \mathbb{L} \dfrac{\partial}{\partial x} A' + \mathbb{M} \dfrac{\partial}{\partial x} B' = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t} B' + \mathbb{H} \dfrac{\partial}{\partial x} A' + \mathbb{K} \dfrac{\partial}{\partial x} B' = \mathcal{U}^{(1)} A' + \mathcal{W}^{(1)} B' \end{cases}$$

Supprimons les indices (1); ce système est linéaire en A' et B' et de plus est homogène. D'après Courant et Hilbert [10] chaque composante de A' et B' est solution d'une équation aux dérivées partielles unique; cette équation est la même pour chaque composante. Soit h l'une des perturbations; on a $Dh = 0$ où D est le déterminant opérationnel construit à partir des opérateurs intervenant dans (15)

$$D = \text{dét} \begin{vmatrix} \mathbb{1}_q \dfrac{\partial}{\partial t} + \mathbb{L} \dfrac{\partial}{\partial x} & \mathbb{M} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \mathbb{H} \dfrac{\partial}{\partial x} - \mathcal{U} & \mathbb{1}_{p-q} \dfrac{\partial}{\partial t} + \mathbb{K} \dfrac{\partial}{\partial x} - \mathcal{W} \end{vmatrix}$$

D est constitué de 4 blocs

D peut s'écrire comme une somme de polynômes homogènes en $\dfrac{\partial}{\partial t}$, $\dfrac{\partial}{\partial x}$ dont les ordres sont successivement p, p - 1, ... , q :

$$(16) \qquad D = \sum_{k=q}^{p} D_k$$

$$D_p = \begin{vmatrix} \mathbb{1}_q \frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{L} \frac{\partial}{\partial x} & \mathbb{M} \frac{\partial}{\partial x} \\ \mathbb{H} \frac{\partial}{\partial x} & \mathbb{1}_{p-q} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{K} \frac{\partial}{\partial x} \end{vmatrix} \qquad D_q = \begin{vmatrix} \mathbb{1}_q \frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{L} \frac{\partial}{\partial x} & \mathbb{M} \frac{\partial}{\partial x} \\ -U & -W \end{vmatrix}$$

On s'intéresse à l'opérateur d'ordre q, D_q. Les vitesses de propagation d'ondes décrites par l'équation $D_q h = 0$ sont intéressantes pour notre milieu [43]. Soit ξ l'une de ces vitesse; elle correspond au problème qui consiste à chercher pour $D_q h = 0$ des solutions ne dépendant que de $x - \xi t$. Or une fonction quelconque de $x - \xi t$ est solution si ξ vérifie :

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} -\xi \mathbb{1}_q + \mathbb{L} & \mathbb{M} \\ U & W \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

4 - Deux interprétations des vitesses caractéristiques du système des équations d'Euler.

On considère un milieu dans un état maxwellien.
Les vitesses caractéristiques du système des équations d'Euler pour ce milieu sont égales :
1° aux vitesses de déplacement des chocs infiniment faibles dans ce milieu
2° aux vitesses caractéristiques du polynôme homogène en $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}$ de plus bas ordre figurant dans l'équation aux dérivées partielles unique vérifiée par chaque petite perturbation après linéarisation des équations cinétiques exactes au voisinage de cet état maxwellien.

En ce qui concerne l'égalité des vitesses caractéristiques des équations d'Euler avec les vitesses de déplacement des chocs infiniment faibles, on exclut évidemment les vitesses caractéristiques du système des équations d'Euler qui appartiendraient à l'ensemble C_r défini dans la remarque du paragraphe A-2.

Le résultat résulte de deux lemmes.

Lemme 1. Les deux polynômes en ξ de degré q

$$\text{dét}\left[-\xi \mathbb{1}_q + \mathbb{L} - \mathbb{M} W^{-1} U \right] \qquad \text{et} \qquad \begin{vmatrix} -\xi \mathbb{1}_q + \mathbb{L} & \mathbb{M} \\ U & W \end{vmatrix}$$

ont les mêmes racines avec le même ordre de multiplicité.

On appelle dans l'ordre $P^{①}(\xi)$ et $P^{②}(\xi)$ les deux polynômes introduits; $P^{②}(\xi)$ est bien de degré q car $\mathcal{W}$ est une matrice régulière.

Soit ξ_o tel que $P^{①}(\xi_o) = 0$. Il existe $X \in R^q$ $(X \neq 0)$ tel que $(\mathbb{L} - \mathbb{M}\mathcal{W}^{-1}\mathcal{U})X = \xi_o X$. Soit le vecteur Z de $\mathbb{R}^p$ dont les q premières composantes sont celles de X et les p - q dernières celles de $Y = -\mathcal{W}^{-1}\mathcal{U}X$ Z est non nul et on a :

$$\begin{pmatrix} -\xi_o\, \mathbb{1}_q + \mathbb{L} & \mathbb{M} \\ \mathcal{U} & \mathcal{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi_o X + \mathbb{L}X + \mathbb{M}Y \\ \mathcal{U}X + \mathcal{W}Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

compte tenu de la définition de Y. Donc $P^{②}(\xi_o) = 0$.

Inversement soit ξ_o annulant $P^{②}(\xi)$. Il existe $Z(Z \neq 0)$ que l'on écrit sous la forme $Z = (X, Y)$ en distinguant les q premières composantes des p - q dernières, tel que :

$$\begin{pmatrix} -\xi_o\, \mathbb{1}_q + \mathbb{L} & \mathbb{M} \\ \mathcal{U} & \mathcal{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\xi_o\, \mathbb{1}_q + \mathbb{L})X + \mathbb{M}Y \\ \mathcal{U}X + \mathcal{W}Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $-\xi_o X + \mathbb{L}X + \mathbb{M}Y = 0$ et $\mathcal{U}X + \mathcal{W}Y = 0$. Comme $\mathcal{W}$ est régulière on a $Y = -\mathcal{W}^{-1}\mathcal{U}X$ et $(-\xi_o\, \mathbb{1}_q + \mathbb{L} - \mathbb{M}\mathcal{W}^{-1}\mathcal{U})X = 0$. X est non nul. Donc $P^{①}(\xi_o) = 0$.

$P^{①}(\xi)$ et $P^{②}(\xi)$ ont les mêmes racines; on va montrer que ces racines apparaissent avec le même ordre de multiplicité en perturbant $\mathbb{L}$ et en procédans par continuité. Soient $\xi_1^o \leqslant \xi_2^o \leqslant \ldots \leqslant \xi_q^o$ les racines éventuellement multiples de $P^{①}(\xi) = 0$. On pose $\xi_j = \xi_j^o$ si ξ_j^o est simple et $\xi_j = \xi_j^o$, $\xi_{j+1} = \xi_j^o + \epsilon, \ldots, \xi_{j+\alpha} = \xi_j^o + \alpha\epsilon$ si ξ_j^o est multiple d'ordre α. ϵ est un nombre arbitraire. On construit la matrice $\mathbb{D}$ telle que $\det(-\xi\, \mathbb{1}_q + \mathbb{L} + \mathbb{D} - \mathbb{M}\mathcal{W}^{-1}\mathcal{U}) = 0$ ait pour racines les ξ_j; il y a bien des manières de choisir $\mathbb{D}$. Supposons ϵ petit de manière que les ξ_j soient tous distincts. Avec la matrice $\mathbb{L}$ remplacée par $\mathbb{L} + \mathbb{D}$ la démonstration précédente s'applique et les polynômes $P^{①}(\xi, \epsilon)$ et $P^{②}(\xi, \epsilon)$ correspondants ont les mêmes racines ξ_j. $P^{②}(\xi, \epsilon) = 0$ a donc pour racines ξ_j^o, $\xi_j^o + \epsilon, \ldots, \xi_j^o + \alpha\epsilon$. En faisant tendre ϵ vers 0 on trouve que $P^{②}(\xi)$ admet ξ_j^o comme zéro de multiplicité α.

Lemme 2. Les racines de $\det(-\xi\, \mathbb{1}_q + \mathbb{L} - \mathbb{M}\mathbb{W}^{-1}\mathbb{U}) = 0$ qui ne sont pas valeurs propres de $\mathbb{L}$ sont racines de $\det(\mathbb{W} - \mathbb{U}\Lambda\mathbb{M}) = 0$ avec le même ordre de multiplicité.

On écrit $-\xi\, \mathbb{1}_q + \mathbb{L} - \mathbb{M}\mathbb{W}^{-1}\mathbb{U} = \Lambda^{-1}(\mathbb{1}_q - \Lambda\mathbb{M}\mathbb{W}^{-1}\mathbb{U})$ et $(\mathbb{W} - \mathbb{U}\Lambda\mathbb{M}) = \mathbb{W}^{-1}(\mathbb{1}_{p-q} - \mathbb{W}^{-1}\mathbb{U}\Lambda\mathbb{M})$. On introduit les matrices $\mathbb{G}_1 = \Lambda\mathbb{M}$ et $\mathbb{G}_2 = \mathbb{W}^{-1}\mathbb{U}$ de type respectivement $(q, p-q)$ et $(p-q, q)$. Démontrons que $\det(\mathbb{1}_q - \mathbb{G}_1\mathbb{G}_2) = 0$ implique et réciproquement $\det(\mathbb{1}_{p-q} - \mathbb{G}_2\mathbb{G}_1) = 0$. En effet supposons $\det(\mathbb{1}_q - \mathbb{G}_1\mathbb{G}_2) = 0$, alors il existe $X \in \mathbb{R}^q$ $(X \neq 0)$ tel que $\mathbb{G}_1\mathbb{G}_2 X = X$. Donc $\mathbb{G}_2\mathbb{G}_1\mathbb{G}_2 X = \mathbb{G}_2 X$. Il existe Y, à savoir $Y = \mathbb{G}_2 X$, non nul, tel que $\mathbb{G}_2\mathbb{G}_1 Y = Y$. Par suite $\det(\mathbb{1}_{p-q} - \mathbb{G}_2\mathbb{G}_1) = 0$. On démontre de même la réciproque. Par suite les deux déterminants du lemme ont les mêmes racines. Pour établir qu'elles ont le même ordre de multiplicité on procède comme dans le lemme 1.

B - PROPRIETE DE L'EQUATION AUX DERIVEES PARTIELLES ASSOCIEE AU SYSTEME DES EQUATIONS CINETIQUES LINEARISEES AU VOISINAGE D'UN ETAT MAXWELLIEN.

1 - Linéarisation du système des équations cinétiques et obtention de l'équation aux dérivées partielles associée.

Remarquons au préalable qu'en linéarisant le système (5) pour les fonctions A et B on est conduit à une équation aux dérivées partielles unique pour chaque perturbation, égale à un facteur multiplicatif près à celle obtenue à partir de la linéarisation du système (1) pour les fonctions N. En effet (5) s'obtient à partir de (1) en faisant des combinaisons linéaires et les inconnues dans (5) s'expriment linéairement en fonction des inconnues figurant dans (1).

On linéarise ici le système (1) en posant comme dans (II-§ A-1) $N_i = N_i^{(o)}(1+X_i)$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, p$, et où les $N_i^{(o)}$ sont les densités dans un état maxwellien et les X_i petits devant 1.

$$N_i^{(o)}\left(\frac{\partial X_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial X_i}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\sum_{j,k,l} A_{kl}^{ij}\left(N_k^{(o)} N_l^{(o)}(X_k + X_l) - A_{ij}^{kl} N_i^{(o)} N_j^{(o)}(X_i + X_j)\right)$$

On supprime l'indice (o) et on introduit la matrice $\mathbb{I}$ définie en (II-§ A-1)

$$(18)\qquad \begin{cases} N_i\left(\dfrac{\partial X_i}{\partial t} + u_i \dfrac{\partial X_i}{\partial x}\right) = \displaystyle\sum_j I_{ij} X_j \\ I_{ij} = \dfrac{1}{2}\left[2\displaystyle\sum_{k,l} A_{jl}^{ik} N_j N_l - \sum_{k,l} A_{ij}^{kl} N_i N_j - \sum_{k,l,m} A_{im}^{kl} N_i N_m \delta_{ij}\right] \end{cases}$$

Equation aux dérivées partielles vérifiée par chaque perturbation h.

Elle s'écrit $\Delta h = 0$, où Δ est le déterminant opérationnel associé au système (18) comme expliqué dans le livre de Courant et Hilbert [10]

$$(19)\quad \Delta = \begin{vmatrix} -N_1\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_1\frac{\partial}{\partial x}\right)+I_{11} & I_{12} & I_{13}\cdots I_{1p} \\ I_{21} & -N_2\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_2\frac{\partial}{\partial x}\right)+I_{22} & I_{23}\cdots I_{2p} \\ \vdots & & \\ I_{p1} & I_{p2} & I_{p3}\cdots -N_p\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_p\frac{\partial}{\partial x}\right)+I_{pp} \end{vmatrix}$$

Dans D défini en (16) le coefficient de $\frac{\partial^p}{\partial t^p}$ est 1; ici il est $(-1)^p \prod_{i=1}^{p} N_i$, donc :

$$(20)\qquad \Delta = (-1)^p\left(\prod_{i=1}^{p} N_i\right) D$$

Δ, d'après (16) s'écrit comme une somme de polynômes homogènes en $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}$ dont les ordres sont successivement p, p - 1, ... , q.

Soient $\Delta_p, \ldots, \Delta_q$ les polynômes successifs. A partir du déterminant (19) il est facile de les expliciter.

$$(21)\begin{cases} \Delta = \sum_{\alpha=0}^{p-q} \Delta_{p-\alpha} \\ \text{avec} \\ \Delta_p = (-1)^p \prod_{l=1}^{p} N_l\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_l\frac{\partial}{\partial x}\right) \\ \Delta_{p-1} = (-1)^{p-1}\sum_{i}\left\{\prod_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{p} N_l\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_l\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\} I_{ii} \\ \Delta_{p-\alpha} = (-1)^{p-\alpha}\sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_\alpha)}\left\{\prod_{l\in\{1,2,\ldots,p\}-\{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha\}} N_l\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_l\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\}\Delta_{i_1 i_2\cdots i_\alpha} \end{cases}$$

la sommation est étendue à toutes les combinaisons $(i_1, i_2, \ldots, i_\alpha)$ (avec $i_1 < i_2 < \ldots < i_\alpha$) de α nombres pris parmi les p nombres 1, 2, ... , p. $\Delta_{i_1 i_2 \cdots i_\alpha}$ est le déterminant extrait de la matrice I obtenu en supprimant les lignes et les colonnes dont le numéro l est différent de $i_1, i_2, \ldots,$ ou i_α .

Lorsque α est supérieur à $p-q$ les déterminants $\Delta_{i_1\, i_2 \ldots i_\alpha}$ extraits de $\mathbb{I}$ sont nuls car on sait (II-§ A-2) que $\mathbb{I}$ est une matrice de rang q. On retrouve ainsi le résultat de (16) à savoir que le polynôme d'ordre le plus bas dans Δ est d'ordre q.

2 - Introduction du polynôme $Q(\lambda)$

a) Propriétés supplémentaires de $\mathbb{I}$ l'hypothèse de microréversibilité étant satisfaite.

Soit $\mathcal{X}$ une matrice colonne à p lignes à éléments dans $\mathbb{C}$, corps des complexes; $\bar{\mathcal{X}}$ est la matrice dont les éléments sont les conjugués de ceux de $\mathcal{X}$; $\mathcal{X}^T$ est la matrice transposée de $\mathcal{X}$. On a :

$$(22)\quad \begin{cases} \bar{\mathcal{X}}^T\, \mathbb{I}\, \mathcal{X} \quad \text{réel} \\ \bar{\mathcal{X}}^T\, \mathbb{I}\, \mathcal{X} \leqslant 0 \\ \bar{\mathcal{X}}^T\, \mathbb{I}\, \mathcal{X} = 0 \iff \mathbb{I}\mathcal{X} = 0 \iff \mathcal{X} \in \mathbb{F}' \end{cases}$$

où $\mathbb{F}'$ est le sous-espace de $\mathbb{C}^p$ engendré par $V_1, \ldots, V_q$.

Cette propriété complète celles énoncées dans (II-§ A-2). Elle est immédiate dans le cas de l'hypothèse I de la microréversibilité (I - (8)) car dans ce cas la matrice $\mathbb{I}$ est symétrique. Dans le cas de l'hypothèse II du bilan semi-détaillé (22) n'est en général pas vérifiée car $\mathbb{I}$ n'est pas symétrique.

$$(23)\quad \begin{cases} \text{Si } I_{ii} = 0 \text{ alors } I_{ij} = 0 \text{ pour tout } j = 1, 2, \ldots, p, \text{ et} \\ \Delta_{i_1\, i_2 \ldots i_\alpha} = 0 \text{ si l'un des } i_1, i_2, \ldots, i_\alpha \text{ est égal à } i. \end{cases}$$

On se rappelle l'expression de I_{ii} donnée en (II-(6)) :

$$I_{ii} = -\sum_{\substack{m=1 \\ m\neq i}}^{p} \Big\{ \sum_{\substack{(k,l)\in(i,m) \\ (k,l)\neq(i,m)}} A_{im}^{kl} \Big\} N_i\, N_m \quad .$$

Dans toute cette étude les densités N_i sont strictement positives; par ailleurs les probabilités de transition sont positives ou nulles. Comme I_{ii} est une somme de termes négatifs on déduit de $I_{ii} = 0$

$$(24)\qquad A_{im}^{kl} = 0 \qquad \forall\, m \neq i \qquad \forall (k,l) \neq (i,m)$$

L'expression de I_{ij} avec $i \neq j$ donnée en (18) peut s'écrire :

$$I_{ij} = \sum_{l} A_{ii}^{jl} N_j N_l + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{p} \Big(\sum_{\substack{l=1 \\ l\neq i}}^{p} A_{ik}^{jl} N_j N_l + A_{ik}^{ji} N_j N_i \Big) - \Big(\sum_{(k,l) \neq (i,j)} A_{ij}^{kl} + A_{ij}^{ij} \Big) N_i N_j \ .$$

Toutes les probabilités de transition figurant dans I_{ij} autres que A_{ij}^{ij} sont nulles soit d'après (24) soit d'après (I-(7)). Il reste :

$$I_{ij} = A_{ij}^{ij} N_i N_j - A_{ij}^{ij} N_i N_j = 0$$

Que $I_{ii} = 0$ entraîne $\Delta_{i_1 i_2 \cdots i_\alpha} = 0$ si l'un des $i_1, i_2, \ldots$ ou i_α est égal à i est évident.

Remarque. (23) signifie que toutes les collisions de particules ayant pour vitesses $\vec{u_i}$, $\vec{u_m}$, sont triviales; la classe d'équivalence $\bar{i}$, selon la relation d'équivalence (I-(3)) est constitué du seul élément $\vec{u_i}$. Dans ce cas les équations cinétiques se découplent (I-§ A-3).

b) Les vitesses caractéristiques des opérateurs $\Delta_{p-\alpha}$, $\alpha = 0, 1, \ldots, p-q$.

Les solutions de la forme $h = \exp(x - \xi t)$ pour l'équation $\Delta h = 0$ où Δ est donné en (19), existent si ξ est solution de :

$$(25)\quad P(\xi) = \begin{vmatrix} N_1(\xi - u_1) + I_{11} & I_{12} & I_{13} \ldots I_{1p} \\ I_{21} & N_2(\xi - u_2) + I_{22} & I_{23} \ldots I_{2p} \\ \vdots & & \\ I_{p1} & I_{p2} & I_{p3} \ldots N_p(\xi - u_p) + I_{pp} \end{vmatrix} = 0$$

On développe ce déterminant en procédant comme pour le développement du déterminant définissant Δ, (21).

(26)
$$
\left|\begin{array}{l}
P(\xi) = \sum_{\alpha=0}^{p-q} P_{p-\alpha}(\xi) \\
\text{avec :} \\
P_p(\xi) = \prod_{l=1}^{p} N_l(\xi - u_l) \\
P_{p-1}(\xi) = \sum_{i} \left\{ \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq i}}^{p} N_l(\xi - u_l) \right\} I_{ii} \\
P_{p-\alpha}(\xi) = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_\alpha)} \left\{ \prod_{l \in \{1,2,\ldots,p\} - \{i_1, i_2, \ldots, i_\alpha\}} N_l(\xi - u_l) \right\} \Delta_{i_1\, i_2 \ldots i_\alpha}
\end{array}\right.
$$

$P_{p-\alpha}(\xi) = 0$ a évidemment pour racines les vitesses caractéristiques de l'opérateur $\Delta_{p-\alpha}$.

(27) Propriété. On suppose les u_i tous distincts. Si $\xi = u_i$ est un zéro de $P_p(\xi)$ et de $P_{p-1}(\xi)$ alors u_i est un zéro de $P_{p-\alpha}(\xi)$ pour tout $\alpha = 0, 1, \ldots, p - q$.

u_i est évidemment un zéro de $P_p(\xi)$; écrivons que u_i est aussi un zéro de $P_{p-1}(\xi)$:

$$P_{p-1}(u_i) = \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq i}}^{p} N_l(u_i - u_l) I_{ii} = 0.$$

Cela entraîne car les u_i sont tous distincts $I_{ii} = 0$. Calculons maintenant $P_{p-\alpha}(u_i)$. Si aucun des $i_1, i_2, \ldots, i_\alpha$ n'est égal à i le terme correspondant est nul car dans le produit $\prod N_l(u_i - u_l)$ figure le facteur $(u_i - u_i)$. Si l'un des $i_1, i_2, \ldots, i_\alpha$ est égal à i le terme correspondant est nul car $\Delta_{i_1\, i_2 \ldots i_\alpha} = 0$ d'après (23).

c) Introduction du polynôme $Q(\lambda)$

On pose (on verra plus loin à quel problème est associé ce polynôme (paragraphe C-4)).

$$
Q(\lambda) = \begin{vmatrix}
N_1(\xi - u_1)\lambda + I_{11} & I_{12} & I_{13} & \ldots & I_{1p} \\
I_{21} & N_2(\xi - u_2)\lambda + I_{22} & I_{23} & \ldots & I_{2p} \\
\vdots & & & & \\
I_{p1} & I_{p2} & I_{p3} & & N_p(\xi - u_p)\lambda + I_{pp}
\end{vmatrix}
$$

En développant suivant les puissances de λ on fait apparaître les différents polynômes $P_{p-\alpha}(\xi)$.

$$(28) \quad Q(\lambda) = P_p(\xi)\lambda^p + P_{p-1}(\xi)\lambda^{p-1} + \ldots + P_{p-\alpha}(\xi)\lambda^{p-\alpha} + \ldots + P_q(\xi)\lambda^q .$$

Propriété. Le polynôme $Q(\lambda)$ a tous ses zéros réels (l'hypothèse I de micro-réversibilité est supposée vérifiée).

On peut écrire $Q(\lambda) = \det(\mathbb{B}\lambda + \mathbb{I})$ où $\mathbb{I}$ est la matrice introduite dans (II-§ A-1) et où $\mathbb{B}$ est une matrice diagonale dont l'élément non nul de la $i^{\text{ème}}$ ligne est $N_i(\xi - u_i)$. On va distinguer deux cas suivant que $\mathbb{B}$ est régulière ou non. Dans le premier cas $\mathbb{B}$ est symétrique définie positive ou négative; que $Q(\lambda)$ ait ses zéros réels est un résultat classique car $\mathbb{I}$ est symétrique. Dans le second cas on peut perturber légèrement $\mathbb{B}$ par l'intermédiaire de ξ et faire une démonstration basée sur des propriétés de continuité; on peut aussi faire la démonstration qui suit.

Si $\mathbb{B}$ est de rang 1, $Q(\lambda)$ a 1 zéros car dans $\mathbb{B}$ figurent 1 éléments non nuls; avec $1 < q$ on a $Q(\lambda) \equiv 0$; avec $p \leqslant 1 \leqslant q$ on a $Q(\lambda)$ non identique à zéro. Dans ce dernier cas montrons que $\text{Ker}\,\mathbb{B} \cap \text{Ker}\,\mathbb{I} = \{0\}$: en effet si cette intersection n'était pas réduite au vecteur 0, il existerait $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^p$, $\mathcal{X} \neq 0$, tel que $\mathbb{B}\mathcal{X} = 0$ et $\mathbb{I}\mathcal{X} = 0$ donc $(\lambda\mathbb{B} + \mathbb{I})\mathcal{X} = 0$ pour tout λ de $\mathbb{C}$; par suite $\det(\lambda\mathbb{B} + \mathbb{I}) = 0$ pour tout λ de $\mathbb{C}$ ce qui est impossible. On suppose toujours $q \leqslant 1 \leqslant p$, soit $\lambda \neq 0$ un zéro de $Q(\lambda)$; il existe $\mathcal{X} \neq 0$ tel que $\lambda\mathbb{B}\mathcal{X} = -\mathbb{I}\mathcal{X}$. $\mathbb{I}\mathcal{X}$ et $\mathbb{B}\mathcal{X}$ sont différents de 0 donc

$$\lambda\, \overline{\mathcal{X}}^{\top}\, \mathbb{B}\mathcal{X} = -\,\overline{\mathcal{X}}^{\top}\, \mathbb{I}\,\mathcal{X} \neq 0$$

$\overline{\mathcal{X}}^{\top}\, \mathbb{B}\,\mathcal{X}$ et $\overline{\mathcal{X}}^{\top}\, \mathbb{I}\,\mathcal{X}$ sont réels, (22), donc λ est réel.

3 - Un lemme.

Théorème préliminaire.

Soient n nombres réels distincts ou non $a_1, a_2, \ldots, a_n$. On considère les fonctions symétriques

$$\sigma_1 = \sum_i a_i , \quad \sigma_2 = \sum_{(i,j)} a_i a_j , \ldots , \sigma_p = \sum_{(i_1\, i_2 \cdots i_p)} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_p}, \ldots, \sigma_n = \prod_i a_i$$

la sommation $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ est étendue à toutes les combinaisons de p nombres pris parmi les n nombres $1, 2, \ldots, n$. On pose $\sigma_0 = 1$.

Si $\sigma_p = 0$ alors on a soit $\sigma_{p-1}\,\sigma_{p+1} < 0$, soit $\sigma_l = 0$ pour $l = n, n-1, \ldots, p$. Cette propriété a lieu pour $p = 1, 2, \ldots, n-1$.

On considère le polynôme $P(x)$ et ses polynômes dérivés :

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$$

$$\begin{cases} P^{(n-p)}(x) = \displaystyle\sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_p)} (x - a_{i_1})(x - a_{i_2}) \ldots (x - a_{i_p})\,(n-p)! \\ p = n-1, n-2, \ldots, 0 \end{cases}$$

Si on fait $x = 0$ il vient :

$$P(0) = (-1)^n \sigma_n, \ \ldots, \ P^{(n-p)}(0) = (-1)^p \sigma_p (n-p)!, \ \ldots, \ P^n(0) = \sigma_0\, n!$$

Remarque 1. Si un polynôme a pour zéros les nombres distincts $x_1, x_2, \ldots, x_l$ avec les ordres de multiplicité $k_1, k_2, \ldots, k_l$, alors le polynôme dérivé a pour zéros $x_1, x_2, \ldots, x_l$ avec les ordres de multiplicité $k_1 - 1, k_2 - 1, \ldots, k_l - 1$ et aussi a un zéro dans chacun des intervalles ouverts $]x_1, x_2[$, $]x_2, x_3[$, $\ldots$, $]x_{l-1}, x_l[$.

Remarque 2. En vertu de la remarque 1, comme $P(x) = 0$ a ses n racines réelles, $P^{(n-p)}(x) = 0$ a p racines réelles.

Si le polynôme $P^{(n-p)}(x)$ admet x_1 et x_2 ($x_1 \neq x_2$ ou non) pour zéros alors le polynôme $P^{(n-p-1)}(x)$ a au moins un zéro sur l'intervalle $[x_1, x_2]$. Si $P(x)$ admet $x = a_i$ comme zéro d'ordre k_i, $P^{(n-p)}(x)$ admet $x = a_i$ comme zéro d'odre $k_i - (n-p)$ sous réserve que $k_i - (n-p) \geqslant 0$. $P^{(n-p)}(x) = 0$ ne peut avoir de racines multiples en dehors des a_i. Si $P^{(n-p)}(x)$ admet $x = a_i$ comme zéro de multiplicité k_i alors $P(x)$ admet $x = a_i$ comme zéro de multiplicité $k_i + (n-p)$.

Démonstration.

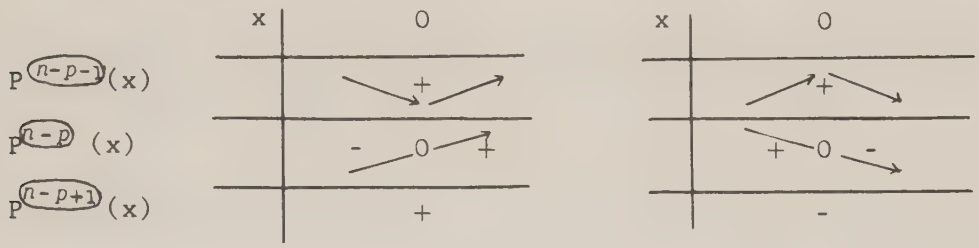
On ordonne les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et on suppose que l'on a k_1 fois le nombre a_1, k_2 fois le nombre a_2 $\ldots$, k_l fois le nombre a_l

$$a_l < a_{l-1} < \ldots < a_2 < a_1 \qquad k_1 + k_2 + \ldots + k_l = n$$

Supposons $\sigma_p = 0$

1er cas. $\sigma_{p+1} \neq 0$ par exemple $(-1)^{p+1}\sigma_{p+1} > 0$

On considère les trois polynômes $P^{(n-p-1)}(x)$, $P^{(n-p)}(x)$, $P^{(n-p+1)}(x)$ et on étudie leurs variations au voisinage de $x = 0$.



cas 1 cas 2

$P^{(n-p)}(0) = (-1)^p \sigma_p (n-p)! = 0$, $P^{(n-p-1)}(0) = (-1)^{p+1}\sigma_{p+1}(n-p-1)! > 0$.

Les trois polynômes envisagés ont toutes leurs racines réelles. $P^{(n-p)}(x)$ admet $x = 0$ comme racine simple car si elle était multiple $P^{(n-p-1)}(x)$ admettrait aussi $x = 0$ comme racine d'après la remarque 2. Deux cas sont à envisager : le cas 1 où $P^{(n-p)}(x)$ est négatif puis positif et le cas 2 où $P^{(n-p)}(x)$ est positif puis négatif. Dans le cas 1, $P^{(n-p)}(x)$ est croissante et dans le cas 2, $P^{(n-p)}(x)$ est décroissante. Des signes de $P^{(n-p)}(x)$ on déduit le sens de variation de $P^{(n-p-1)}(x)$.

$P^{(n-p+1)}(0)$ est non nul sinon $x = 0$ serait une racine double de $P^{(n-p)}(x)$; dans le cas 1, $P^{(n-p+1)}(0)$ est positif et dans le cas 2, $P^{(n-p+1)}(0)$ est négatif.

Le cas 1 est impossible : en effet si $P^{(n-p+1)}(x)$ reste positif pour $0 < x < x_1$ (x_1 éventuellement infini) $P^{(n-p)}(x)$ et $P^{(n-p-1)}(x)$ demeurent positif sur le même intervalle. Pour x_1 infini ceci est impossible car $P^{(n-p-1)}(x) = 0$ doit avoir une racine à droite de 0, d'après la remarque 1. Pour x_1 fini, on a $P^{(n-p+1)}(x_1) = 0$ et $P^{(n-p)}(x)$ admet un zéro à droite de x_1 ; soit x_2 ce premier zéro. Sur $[0, x_2]$ $P^{(n-p)}(x)$ est positif; $P^{(n-p-1)}(x)$ croît et reste donc positif sur $[0, x_2]$: ceci est impossible, d'après la remarque 1. Le cas 2 est seul possible et on en déduit $\sigma_{p+1}\sigma_{p-1} < 0$.

2ème cas $\sigma_{p+1} = 0$.

On a $P^{(n-p)}(0) = P^{(n-p-1)}(0) = 0$. $P^{(n-p-1)}(x)$ admet donc $x = 0$ comme racine au moins double. D'après la remarque 2, 0 est l'un des a_i et tous les polynômes $P^{(\alpha)}(x)$ sont nuls pour $x = 0$ pour $\alpha = 0, 1, \ldots, n-p$. Par suite $\sigma_n = \sigma_{n-1} = \ldots = \sigma_p = 0$.

La démonstration du théorème préliminaire est achevée. Si $\sigma_1 = 0$ on doit avoir $\sigma_2 \leqslant 0$ d'après le théorème car $\sigma_0 = 1$. Ceci se vérifie directement car $2\sigma_2 = \sigma_1^2 - \sum_i a_i^2$.

Conséquence. Soit un polynôme à coefficients réels, les coefficients étant écrits comme fonctions symétriques des racines :

$$P(x) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} + \ldots + (-1)^p \sigma_p x^{n-p} + \ldots + (-1)^n \sigma_n .$$

On suppose que $P(x)$ a toutes ses racines réelles distinctes ou non. Alors :

1° si $\sigma_p = 0$ et $\sigma_{p+1} \neq 0$ on a $\sigma_{p+1}\, \sigma_{p-1} < 0$

2° si $\sigma_p = 0$ et $\sigma_{p+1} = 0$ on a $\sigma_p = \sigma_{p+1} = \ldots = \sigma_n = 0$.

Enoncé du lemme.

Soit un polynôme $R(x)$ de degré n de la forme

$$R(x) = R_p(\xi)x^n + R_{p-1}(\xi)x^{n-1} + \ldots + R_\alpha(\xi)x^{n-p+\alpha} + \ldots + R_q(\xi)x^{n-p+q}$$

où les coefficients $R_\alpha(\xi)$ sont des polynômes en ξ de degré α. Si $R(x)$ a ses n zéros réels, et si $R_p(\xi)$ et $R_{p-1}(\xi)$ ont tous leurs zéros réels, et distincts, les zéros η_i, $i = 1, 2, \ldots, p-1$ du second polynôme séparant strictement les zéros ζ_i , $i = 1, 2, \ldots, p$ du premier c'est à dire

$$\zeta_p < \eta_{p-1} < \zeta_{p-1} < \ldots < \eta_1 < \zeta_1$$

alors $R_{p-2}(\xi)$ a tous ses zéros réels; ces derniers ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, p-2$, séparent les zéros de $R_{p-1}(\xi)$. Plus précisément on peut écrire

$$(29) \quad R(x) = R_p(\xi)x^n + \{\text{P.G.C.D. } (R_{p-1}(\xi), R_{p-2}(\xi))\} \times \left\{R^*_{p-1}(\xi)x^{n-1} + \ldots + R^*_\alpha(\xi)x^{n-p+\alpha} + \ldots + R^*_q(\xi)x^{n-p+q}\right\}$$

où les $R^*_\alpha(\xi)$ sont des polynômes en ξ, les zéros de $R^*_{p-2}(\xi)$ étant réels et distincts et séparant strictement les zéros réels et distincts de $R^*_{p-1}(\xi)$.

Démonstration du lemme.

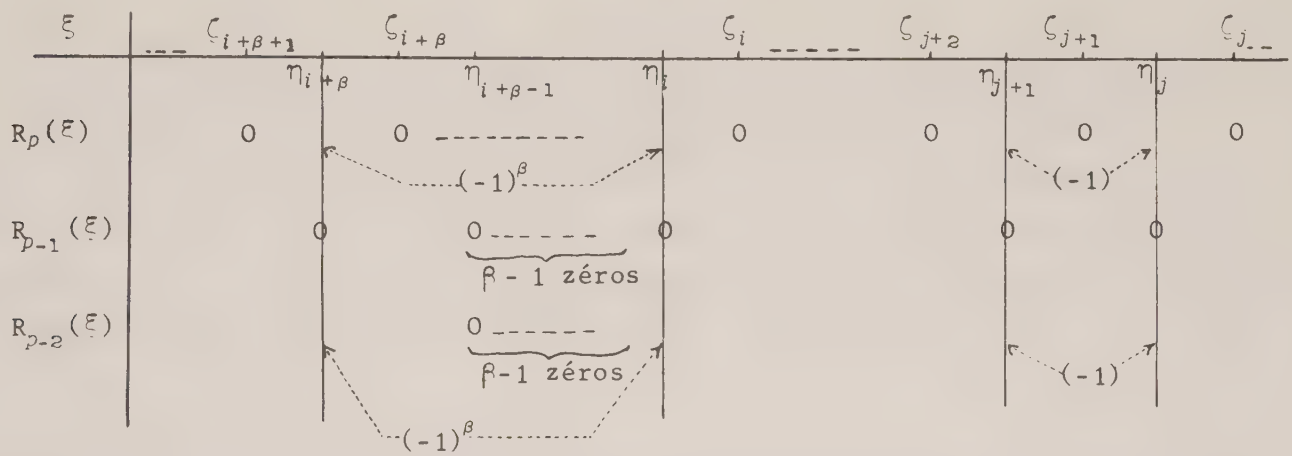
Il y a au moins un η_i en lequel $R_{p-2}(\xi)$ est non nul sinon $R_{p-2}(\xi)$ aurait $p-1$ racines distinctes ce qui est impossible car $R_{p-2}(\xi)$ est de degré $p-2$ et n'est pas identiquement nul.

S'il n'y a qu'un seul η_i en lequel $R_{p-2}(\xi)$ est non nul la démonstration de la première partie du lemme est achevée; en effet il est évident que :

$$\eta_{p-1} = \xi_{p-2} < \ldots = \xi_{i+1} < \eta_{i+1} = \xi_i < \eta_i < \xi_{i-1} = \eta_{i-1} < \ldots < \xi_1 = \eta_1$$

l'indice i peut-être 1 ou $p-1$ ce qui ne complique nullement.

On suppose que $R_{p-2}(\xi)$ est différent de zéro pour $\xi = \eta_i$ et $\xi = \eta_{i+\beta}$ et que $R_{p-2}(\xi)$ est nul pour $\xi = \eta_\gamma$ avec $\gamma = i+1,\ i+2, \ldots, i+\beta-1$. β peut éventuellement être 1. Autrement dit $R_{p-2}(\xi)$ a au moins $\beta-1$ racines distinctes comprises dans l'intervalle $]\eta_{i+\beta}, \eta_i[$



Faisons $\xi = \eta_i$ et considérons alors le polynôme $R(x)$ défini dans le lemme. Il a toutes ses racines réelles. Le coefficient de x^{n-1} est nul et celui de x^{n-2} est non nul. D'après la conséquence du théorème préliminaire et parce que $R_p(\eta_i) \neq 0$ on a

$$R_{p-2}(\eta_i)\ R_p(\eta_i) < 0$$

Le même raisonnement fait pour $\xi = \eta_{i+\beta}$ conduit à

$$R_{p-2}(\eta_{i+\beta})\ R_p(\eta_{i+\beta}) < 0$$

Donc $R_{p-2}(\eta_i).R_{p-2}(\eta_{i+\beta})$ est de même signe que $R_p(\eta_i).R_p(\eta_{i+\beta})$. Cette dernière expression a le signe de $(-1)^\beta$; on obtient ainsi le signe de la première expression.

Pour β pair $R_{p-2}(\xi)$ a donc un nombre pair de zéros dans l'intervalle ouvert $]\eta_{i+\beta}, \eta_i[$; mais par ailleurs on en connaît déjà $\beta - 1$; comme $\beta - 1$ est impair il y a donc un zéro supplémentaire dans l'intervalle en question.

On montre de même que pour β impair, $R_{p-2}(\xi)$ admet β zéros dans l'intervalle ouvert $]\eta_{i+\beta}, \eta_i[$.

Ce zéro supplémentaire peut être distinct des η_γ $\gamma = i+1, i+2, \ldots, i+\beta-1$, ou confondu avec l'un d'eux auquel cas $R_{p-2}(\xi)$ admet une racine double.

Les racines de $R_{p-2}(\xi) = 0$ que l'on vient de mettre en évidence séparent bien celles de $R_{p-1}(\xi)$ sur l'intervalle considéré :

$$\eta_{i+\beta} < \xi_{i+\beta} = \ldots < \xi_{\gamma+1} = \eta_{\gamma+1} \leqslant \xi_\gamma \leqslant \eta_\gamma = \xi_{\gamma-1} < \ldots = \xi_i < \eta_i$$

γ peut éventuellement être égal à i et dans ce cas il faut modifier légèrement la suite de ces inégalités.

En juxtaposant les intervalles de la forme $]\eta_{i+\beta}, \eta_i[$ on obtient la séparation des racines sur un intervalle $]\eta_l, \eta_k[$ où η_l est la plus petite racine de $R_{p-1}(\xi) = 0$ pour laquelle $R_{p-2}(\xi)$ est non nul, et où η_k est la plus grande racine de $R_{p-1}(\xi) = 0$ pour laquelle $R_{p-2}(\xi)$ est non nul. Sur l'intervalle $]\eta_l, \eta_k[$ on a $l - k$ zéros pour $R_{p-2}(\xi)$; ses autres zéros sont $\eta_{p-1}, \eta_{p-2}, \ldots, \eta_{i+1}$ et $\eta_{k-1}, \eta_{k-2}, \ldots, \eta_1$. Le polynôme $R_{p-2}(\xi)$ a donc bien $p - 2$ racines réelles et ces racines séparent celles de $R_{p-1}(\xi)$. Ceci démontre la première partie du lemme.

Supposons qu'en $\xi = \eta_i$ $R_{p-2}(\xi)$ soit nul. Comme $R_p(\eta_i) \neq 0$ le polynôme $R(x)$ a n racines réelles et l'application de la conséquence du théorème préliminaire conduit à :

$$R_{p-\alpha}(\eta_i) = 0 \qquad \forall \alpha = 1, 2, \ldots, p - q.$$

Autrement dit si $R_{p-1}(\xi)$ et $R_{p-2}(\xi)$ ont un zéro commun, alors ce zéro est aussi zéro commun de tous les polynômes $R_{p-\alpha}$ avec $\alpha = 1, 2, \ldots, p - q$.

Soient η_{i_α}, $\alpha = 1, 2, \ldots, \alpha^*$ les zéros communs de $R_{p-1}(\xi)$ et $R_{p-2}(\xi)$ (α^* peut éventuellement être 0). On peut écrire :

$$R(x) = R_p(\xi)x^n + \prod_{\alpha=1}^{\alpha^*} (\xi - \eta_{i_\alpha}) \left\{R^*_{p-1}(\xi)x^{n-1} + R^*_{p-2}(\xi)x^{n-2} + \ldots \right.$$

$$\left. + R^*_{p-\alpha}(\xi)\, x^{n-\alpha} + \ldots + R^*_q(\xi)\, x^{n-p+q}\right\} .$$

Cette expression peut se mettre sous la forme (29). Les polynômes $R^*_{p-1}(\xi)$ et $R^*_{p-2}(\xi)$ ont respectivement $p-1-\alpha^*$ et $p-2-\alpha^*$ zéros réels. Ces zéros sont distincts et ceux de $R^*_{p-2}(\xi)$ séparent strictement ceux de $R^*_{p-1}(\xi)$. Ainsi la deuxième partie du lemme est démontrée.

Remarque 3. Dans la formule (29) il n'y a aucune ambiguité si on prend pour P.G.C.D. de 2 polynômes celui dont le terme de plus haut degré a pour coefficient 1.

Remarque 4. Le polynôme $R_{p-1}(\xi)$ a ses $p-1$ zéros distincts. Le polynôme $R_{p-2}(\xi)$ peut avoir des racines doubles mais jamais triples.

$R_{p-2}(\xi)$ ne peut avoir de zéro double en $\xi = \xi_i$ que si ξ_i est un zéro de $R_{p-1}(\xi)$.

$R_{p-2}(\xi)$ ne peut avoir deux zéros doubles consécutifs.

4 - Propriété d'emboitement des groupements homogènes d'ordre successif de l'équation aux dérivées partielles $\Delta h = 0$.

Le but de ce paragraphe est d'étudier les vitesses caractéristiques des opérateurs $\Delta_{p-\alpha}$, $\alpha = 0, 1, \ldots, p-q$, c'est à dire les zéros des polynômes $P_{p-\alpha}(\xi)$ définis en (26).

Théorème 1.

On suppose les u_i tous distincts. Alors les zéros du polynôme $P_\alpha(\xi)$ sont réels, et les zéros du polynôme $P_\alpha(\xi)$ séparent ceux du polynôme $P_{\alpha+1}(\xi)$ pour tout $\alpha = p-1, \ldots, q$.

1°) On suppose $I_{ii} < 0$ pour tout i, alors les zéros de $P_{p-1}(\xi)$ séparent strictement ceux de $P_p(\xi)$.

Ce polynôme $P_p(\xi)$ a p zéros réels et distincts à savoir les vitesses u_p, $u_{p-1}, \ldots, u_1$, que l'on suppose ordonnées dans le sens croissant. On a :

$$P_{p-1}(u_i) = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{p} N_k(u_i - u_k) I_{ii} \quad , \quad P_{p-1}(u_{i+1}) = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i+1}}^{p} N_k(u_{i+1} - u_k) I_{i+1\ i+1}$$

donc :

$$\frac{P_{p-1}(u_i)}{P_{p-1}(u_{i+1})} = \frac{I_{ii}}{I_{i+1\ i+1}} \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i \\ k\neq i+1}}^{p} \frac{(u_i - u_k)}{(u_{i+1} - u_k)} \cdot \frac{N_{i+1}(u_i - u_{i+1})}{N_i(u_{i+1} - u_i)} < 0$$

car le premier facteur est positif, le dernier négatif et chaque facteur de la forme $(u_i - u_k)/(u_{i+1} - u_k)$ pour $k \neq i$ et $k \neq i+1$ est positif. En conséquence $P_{p-1}(\xi)$ s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]u_{i+1}, u_i[$. Comme il y a $(p-1)$ intervalles de cette forme on met ainsi en évidence les $p-1$ racines de $P_{p-1}(\xi) = 0$. Soient $\xi_{p-1}^{(p-1)}$, $\xi_{p-2}^{(p-1)}$, ... , $\xi_1^{(p-1)}$ les zéros ordonnés dans le sens croissant de $P_{p-1}(\xi)$.

$$u_p < \xi_{p-1}^{(p-1)} < u_{p-1} < \ldots < u_{i+1} < \xi_i^{(p-1)} < u_i < \ldots < \xi_1^{(p-1)} < u_1$$

2°) Si certains I_{ii} sont nuls les zéros de $P_{p-1}(\xi)$ séparent encore ceux de $P_p(\xi)$.

On suppose les I_{ii} non tous nuls sinon le problème n'a plus de sens car les $P_{p-\alpha}(\xi)$ s'annulant pour $\xi = u_i$ avec $i = 1, 2, \ldots, p$, d'après (27), sont tous identiquement nuls.

Si un seul I_{ii} est non nul les zéros de $P_{p-1}(\xi)$ sont $u_p, u_{p-1}, \ldots, u_{i+1}, u_{i-1}, \ldots, u_1$ et le résultat est évident :

$$u_p = \xi_{p-1}^{(p-1)} < \ldots < u_{i+1} = \xi_i^{(p-1)} < u_i < \xi_{i-1}^{(p-1)} = u_{i-1} < \ldots < \xi_1^{(p-1)} = u_1$$

i peut éventuellement être égal à 1 ou à p.

On suppose maintenant : $I_{ii} \neq 0$, $I_{i+\beta\ i+\beta} \neq 0$, $I_{\gamma\gamma} = 0$ pour $\gamma = i+1, \ldots, i+\beta-1$. β peut éventuellement être égal à 1, $\beta \geqslant 1$.

$$\frac{P_{p-1}(u_i)}{P_{p-1}(u_{i+\beta})} = \frac{I_{ii}}{I_{i+\beta\ i+\beta}} \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i \\ k\neq i+\beta}}^{p} \frac{u_i - u_k}{(u_{i+\beta} - u_k)} \cdot \frac{N_{i+\beta}(u_i - u_{i+\beta})}{N_i(u_{i+\beta} - u_i)}$$

Le premier facteur est positif et le dernier négatif. Le facteur $(u_i - u_k)/(u_{i+\beta} - u_k)$ est positif pour $k = 1, 2, \ldots, i-1$ et $k = i+\beta+1, i+\beta+2, \ldots, p$ et il est négatif pour $k = i+1, i+2, \ldots, i+\beta-1$. L'expression ci-dessus est donc du signe de $(-1)^\beta$.

Pour β pair (impair) $P_{p-1}(\xi)$ possède donc un nombre pair (impair) de zéros sur l'intervalle $]u_{i+\beta}, u_i[$ or on en connaît déjà $\beta - 1$ d'après (27). $\beta - 1$ est un nombre impair (pair) donc il y a un zéro supplémentaire sur l'intervalle $]u_{i+\beta}, u_i[$. Ce zéro est ou n'est pas confondu avec l'un des u_i .

Sur l'intervalle $]u_{i+\beta}, u_i[$ les zéros de $P_{p-1}(\xi)$ au nombre de β séparent les zéros de $P_p(\xi)$.

En juxtaposant les intervalles de la forme $]u_{i+\beta}, u_i[$ on obtient la séparation des racines sur un intervalle de la forme $]u_l, u_k[$ où u_l est la plus petite racine de $P_p(\xi) = 0$ en laquelle $P_{p-1}(\xi)$ est non nul et où u_k est la plus grande racine de $P_p(\xi) = 0$ en laquelle $P_{p-1}(\xi)$ est non nul. Sur cet intervalle $P_{p-1}(\xi)$ a $1 - k$ zéros. Les autres zéros de $P_{p-1}(\xi)$ sont $u_p, u_{p-1}, \ldots, u_{l+1}$ et $u_{k-1}, u_{k-2}, \ldots, u_1$.

$P_{p-1}(\xi)$ a donc tous ses zéros réels et ces zéros séparent ceux de $P_p(\xi)$. $P_{p-1}(\xi)$ peut éventuellement avoir un zéro double mais jamais triple et ce zéro double ne peut être que l'un des u_i.

La démonstration donnée dans le 2° généralise celle du 1° .

En conclusion comme on sait d'après (27) que si u_i annule $P_{p-1}(\xi)$ alors u_i annule $P_{p-\alpha}(\xi)$ pour tout $\alpha = 0, 1, \ldots, p - q$ on peut écrire

$$(30)\quad Q(x) = \text{P.G.C.D.}\,(P_p(\xi), P_{p-1}(\xi))\left\{P_p^*(\xi)x^p + P_{p-1}^*(\xi)x^{p-1} + \ldots + P_{p-\alpha}^*(\xi)x^{p-\alpha} + \ldots + P_q^*(\xi)x^q\right\}$$

où les $P_{p-\alpha}^*(\xi)$ sont des polynômes et où $P_p^*(\xi)$ et $P_{p-1}^*(\xi)$ ont leurs zéros tous réels et distincts les zéros de $P_{p-1}^*(\xi)$ séparant strictement ceux de $P_p^*(\xi)$. Le P.G.C.D. de $P_p(\xi)$ et $P_{p-1}(\xi)$ a tous ses zéros réels.

On va établir le théorème 1 en raisonnant par récurrence. On va démontrer que pour $l = 0, 1, 2, \ldots, p - q$ on peut écrire :

$$\begin{aligned}(31)\quad Q(x) = {} & \text{P.G.C.D.}(P_p(\xi), P_{p-1}(\xi))\left\{P_p^*(\xi)x^p + \text{P.G.C.D.}(P_{p-1}^*(\xi), P_{p-2}^*(\xi))\right\} \\ & P_{p-1}^{2*}(\xi)x^{p-1} + \text{P.G.C.D.}(P_{p-2}^{2*}(\xi), P_{p-3}^{2*}(\xi))\left\{P_{p-2}^{3*}(\xi)x^{p-2} + \ldots\right. \\ & + \text{P.G.C.D.}(P_{p-l}^{l*}(\xi), P_{p-l-1}^{l*}(\xi))\left\{P_{p-l}^{(l+1)*}(\xi)x^{p-l} + P_{p-l-1}^{(l+1)*}x^{p-l-1} + \ldots\right. \\ & \left.\left.\left. + P_q^{(l+1)*}(\xi)x^q\right\}\right\} \ldots\Big\}\end{aligned}$$

où pour $\alpha = 0,1,2, \ldots, l$, premièrement $P_{p-\alpha}^{(\alpha+1)*}(\xi)$ et $P_{p-\alpha-1}^{(\alpha+1)*}(\xi)$ ont leurs zéros tous réels et distincts, les zéros du second polynôme séparant strictement les zéros du premier, et deuxièmement P.G.C.D.$(P_{p-\alpha}^{\alpha*}(\xi), P_{p-\alpha-1}^{\alpha*}(\xi))$ a tous ses zéros réels.

Le résultat est acquis pour $l = 0$ car on a (30). On suppose que (31) est vrai à l'ordre l et on va démontrer que (31) est encore vrai à l'ordre $l + 1$.

Le polynôme $Q(x)$ a ses zéros réels, donc également le polynôme ci-dessous obtenu en posant $y = \frac{1}{x}$ dans $x^{-p} Q(x)$:

$$Q_1(y) = P_p(\xi) + P_{p-1}(\xi)y + \ldots + P_{p-\alpha}(\xi)y^{\alpha} + \ldots + P_q(\xi)y^{p-q}$$

Tous les polynômes dérivés de $Q_1(y)$ ont aussi tous leurs zéros réels, en particulier le polynôme dérivé l fois :

$$Q_1^{(l)}(y) = l!\, P_{p-l}(\xi) + \frac{(l+1)!}{1!} P_{p-l-1}(\xi)y + \ldots + \frac{(p-q)!}{(p-q-l)!} P_q(\xi)y^{p-q-l}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence on peut écrire pour $\beta = p-l, p-l-1, \ldots, q$:

$$P_\beta(\xi) = \left\{\text{P.G.C.D.}(P_p(\xi), P_{p-1}(\xi))\right\} \left\{\text{P.G.C.D.}(P_{p-1}^*(\xi), P_{p-2}^*(\xi))\right\} \ldots$$
$$\left\{\text{P.G.C.D.}(P_{p-l}^{l*}(\xi), P_{p-l-1}^{l*}(\xi))\right\} P_\beta^{(l+1)*}(\xi) .$$

Le polynôme ci-dessous a donc tous ses zéros réels :

$$l!\, P_{p-l}^{(l+1)*}(\xi) + \frac{(l+1)!}{1!} P_{p-l-1}^{(l+1)*}(\xi)y + \ldots + \frac{(p-q)!}{(p-q-l)!} P_q^{(l+1)*}(\xi)y^{p-q-l}$$

et de même le polynôme

$$l!\, P_{p-l}^{(l+1)*}(\xi)x^{p-l} + \frac{(l+1)!}{1!} P_{p-l-1}^{(l+1)*}(\xi)x^{p-l-1} + \ldots + \frac{(p-q)!}{(p-q-l)!} P_q^{(l+1)*}(\xi)x^{q}.$$

Le polynôme ci-dessus a tous ses zéros réels, et par ailleurs les polynômes $P_{p-l}^{(l+1)*}(\xi)$ et $P_{p-l-1}^{(l+1)*}(\xi)$ d'après l'hypothèse de récurrence possèdent les propriétés requises pour l'application du lemme du paragraphe B-3. Donc les zéros de $P_{p-l-2}^{(l+1)*}(\xi)$ séparent ceux de $P_{p-l-1}^{(l+1)*}(\xi)$. Par ailleurs le P.G.C.D. de $P_{p-l-2}^{(l+1)*}(\xi)$ et de $P_{p-l-1}^{(l+1)*}(\xi)$ divise tous les polynômes $P_\beta^{(l+1)*}(\xi)$ pour $\beta = p-l-1, p-l-2, \ldots, q$; les facteurs numériques figurant devant chaque polynôme ne changent rien aux propriétés relatives aux racines de ces polynômes.

On peut donc écrire la formule (31) à l'ordre $l+1$; les polynômes $P^{(l+2)*}_{p-l-1}(\xi)$ et $P^{(l+2)*}_{p-l-2}(\xi)$ ont leurs zéros tous réels et distincts, les zéros du second polynôme séparant strictement les zéros du premier et de plus P.G.C.D.$(P^{(l+1)*}_{p-l}(\xi), P^{(l+1)*}_{p-l-1}(\xi))$ a tous ses zéros réels. La démonstration par récurrence est donc achevée.

En conclusion pour deux polynômes consécutifs $P_\alpha(\xi)$ et $P_{\alpha+1}(\xi)$ de degré α et $\alpha+1$ on a :

$$P_{\alpha+1}(\xi) = \text{P.G.C.D.}(P_\alpha(\xi), P_{\alpha+1}(\xi)).P^{(p-\alpha)*}_{\alpha+1}(\xi)$$

$$P_\alpha(\xi) = \text{P.G.C.D.}(P_\alpha(\xi), P_{\alpha+1}(\xi)).P^{(p-\alpha)*}_{\alpha}(\xi)$$

P.G.C.D.$(P_\alpha(\xi), P_{\alpha+1}(\xi))$, $P^{(p-\alpha)*}_{\alpha+1}(\xi)$, $P^{(p-\alpha)*}_{\alpha}(\xi)$ ont leurs zéros tous réels; par ailleurs les zéros du dernier polynôme séparent strictement ceux du second. Et ceci a lieu pour $\alpha = q, q+1, \ldots, p-1$.

Remarques. Elles font suite aux remarques 3 et 4 du paragraphe B-3.

1. Le polynôme $P_{p-\alpha}(\xi)$ peut avoir des racines multiples. Une racine multiple sera au maximum d'ordre $\alpha+1$

2. Si $P_{p-\alpha}(\xi)$ admet $\xi = \xi^*$ comme zéro d'ordre $\alpha+1$ alors $P_{p-\alpha+1}(\xi)$ admet $\xi = \xi^*$ comme zéro d'ordre α et en remontant la chaîne des polynômes on voit que ξ^* est nécessairement un u_i

Exemple possible

ξ	---	u_{i-1}	u_i	u_{i+1}	---
$P_p(\xi)$	0 0 0 0	0	0	0 0	0 0 0
$P_{p-1}(\xi)$	0 0 0	00		00	0 0
$P_{p-2}(\xi)$	00	000		00	0
$P_{p-3}(\xi)$	0	0000		0	0

Théorème 2

On ne fait aucune hypothèse sur les u_i. Les zéros du polynôme $P_\alpha(\xi)$ sont réels et les zéros du polynôme $P_\alpha(\xi)$ séparent ceux du polynôme $P_{\alpha+1}(\xi)$ pour $\alpha = q, q+1, \ldots, p-1$.

On se ramène au cas du théorème 1. Soit ϵ un nombre positif. A u_i figurant avec la multiplicité l_i dans le polynôme $P_p(\xi)$ on fait correspondre les l vitesses suivantes

$$u_i, \quad u_i - \epsilon, \quad u_i - 2\epsilon, \quad \ldots, \quad u_i - l_i\epsilon .$$

On choisit ϵ assez petit de manière que les nouvelles vitesses u'_j introduites soient toutes distinctes et que les dédoublements pour deux vitesses u_i distinctes consécutives ne se chevauchent pas :

$$u'_1 < u'_2 < \ldots < u'_p$$

avec

$$u'_{i+k} = u_i - k\epsilon \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, \ldots, l_i .$$

Considérons les polynômes $P_\alpha(\xi)$ associés aux vitesses u_i définies par les formules (26), et les polynômes $P'_\alpha(\xi)$ associés aux vitesses u'_i définis par les mêmes formules. Les coefficients de ξ^α dans ces deux polynômes sont les mêmes et sont non nuls. Le coefficient de ξ^β ($\beta = \alpha-1, \alpha-2, \ldots, 0$) dans $P'_\alpha(\xi)$ est une fonction continue de ϵ et plus précisément est un polynôme en ϵ ; quand ϵ tend vers 0 ce coefficient tend vers le coefficient de ξ^β dans $P_\alpha(\xi)$.

Donc les racines $\xi'^{(\alpha)}_i$ de l'équation $P'_\alpha(\xi) = 0$ tendent, quand ϵ tend vers 0, vers les racines $\xi^{(\alpha)}_i$ de $P_\alpha(\xi) = 0$.

Aux polynômes $P'_\alpha(\xi)$ on peut appliquer le théorème 1 : les polynômes $P'_\alpha(\xi)$ ont toutes leurs racines réelles et les racines de $P'_\alpha(\xi)$ séparent celles de $P'_{\alpha+1}(\xi)$. Les $\xi^{(\alpha)}_i$ limites quand ϵ tend vers 0 des $\xi'^{(\alpha)}_i$, réelles pour tout ϵ, sont donc réelles. Par ailleurs des inégalités

$$\xi'^{(\alpha+1)}_{\alpha+1} \leqslant \xi'^{(\alpha)}_\alpha \leqslant \xi'^{(\alpha+1)}_\alpha \leqslant \ldots \leqslant \xi'^{(\alpha)}_1 \leqslant \xi'^{(\alpha+1)}_1$$

on déduit

$$\xi^{(\alpha+1)}_{\alpha+1} \leqslant \xi^{(\alpha)}_\alpha \leqslant \xi^{(\alpha+1)}_\alpha \leqslant \ldots \leqslant \xi^{(\alpha)}_1 \leqslant \xi^{(\alpha+1)}_1 ,$$

le théorème 2 est démontré.

Conséquence 1. Les vitesses caractéristiques du système des équations d'Euler sont réelles.

En effet d'après le théorème 2 $P_q(\xi)$ a ses q racines réelles. Mais les zéros de $P_q(\xi)$ sont aussi les vitesses caractéristiques des deux opérateurs D_q défini en (16) et Δ_q défini en (21) (D_q et Δ_q sont proportionnels). Et les vitesses caractéristiques de D_q sont égales aux vitesses caractéristiques du système des équations d'Euler (6) d'après le lemme 1 du paragraphe A-4. Le théorème 2 permet donc de retrouver le fait que le système des équations d'Euler du milieu est un système hyperbolique résultat qui a été établi à la fin du paragraphe A-1.

Généralisation.

Soit un système aux dérivées partielles de p équations pour les p inconnues N ($N = (N_1, N_2, \ldots, N_p)$) à coefficients constants, écrit sous forme normale et de la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} N + \mathcal{A} N = \mathbb{I} N$$

$\mathcal{A}$ est une matrice diagonale. $\mathbb{I}$ est une matrice symétrique négative, de rang $p - q$ et possédant la propriété suivante (voir (23)).

Si $I_{ii} = 0$ alors $I_{ij} = 0$ pour tout $j = 1, 2, \ldots, p$. Alors l'équation aux dérivées partielles unique que l'on peut écrire pour chaque composante de N s'écrit comme une somme d'opérateurs homogènes en $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}$ d'ordre successif $p, p-1, \ldots, q$. Les vitesses caractéristiques de chaque opérateur sont réelles, et celles de l'opérateur d'ordre α séparent celles de l'opérateur d'ordre $\alpha+1$ pour $\alpha = p-1, \ldots, q$.

On dira qu'il y a emboitement des groupements homogènes d'ordre successif. Cette propriété d'emboitement se rencontre dans de très nombreux problèmes de Mécanique et de Physique et est lié à la stabilité des solutions, Whitham [43].

C - LES ONDES DE CHOC DANS UN MILIEU A REPARTITION DISCRETE DE VITESSES

On s'intéresse dans ce paragraphe à la propagation des ondes de choc faibles dans le milieu sans dissipation décrit par les équations d'Euler (6) et aussi dans le milieu avec dissipation décrit par les équations cinétiques exactes (5).

1 - Le problème du choc

a) Le problème du choc dans le milieu sans dissipation.

Le milieu sans dissipation est décrit par le système des équations d'Euler (6); ce système est un système quasi-linéaire ayant la forme de lois de conservation, et on peut développer une théorie des chocs, Courant-Hilbert [10].

Soit un milieu 1 (maxwellien constant) et un milieu 2 (maxwellien constant) séparés par un choc dont la vitesse de déplacement est ξ constante. Les relations de choc sont :

$$(32) \qquad \begin{cases} -\xi(A^{(2)} - A^{(1)}) + \mathbb{L}(A^{(2)} - A^{(1)}) + \mathbb{M}(B^{(2)} - B^{(1)}) = 0 \\ \text{avec} \quad Q(A^{(1)}, B^{(1)}) = Q(A^{(2)}, B^{(2)}) = 0 \ . \end{cases}$$

On peut dire aussi : s'il existe un choc se propageant dans le milieu 1 avec la vitesse de déplacement ξ, alors ce choc sépare le milieu 1 d'un milieu 2, ces deux milieux étant liés par les relations (32).

b) Le problème du choc dans le milieu avec dissipation.

Le milieu avec dissipation est décrit par le système des équations exactes (5). On a déjà vu le problème de la structure d'une onde de choc dans le paragraphe A-2. Soit un milieu 1 (maxwellien constant) caractérisé par les quantités $A^{(1)}$, $B^{(1)}$. On cherche les solutions du système (5) ne dépendant que de la variable $\eta = x - \xi t$; elles satisfont aux équations (11),(12). Le point $A^{(1)}$, $B^{(1)}$ est un point singulier de ces équations, les autres points singuliers étant les points $A^{(2)}$, $B^{(2)}$ tels que :

$$(33)\qquad \begin{cases} A^{(2)} = A^{(1)} - \Lambda M(B^{(2)} - B^{(1)}) \\ Q(A^{(2)}, B^{(2)}) = 0 \quad \text{sachant que} \quad Q(A^{(1)}, B^{(1)}) = 0 \ . \end{cases}$$

S'il existe une courbe intégrale joignant les points singuliers $A^{(1)}$, $B^{(1)}$ et $A^{(2)}$, $B^{(2)}$ on dit que les deux états 1 et 2 sont reliés par un choc. Ce choc se propage avec la vitesse de déplacement ξ. La solution donnée par la courbe intégrale décrit la structure du choc correspondant. Etant donnés le milieu 1 et la vitesse ξ telle que Λ existe, il est évident que les relations (32) et les relations (33) déterminent le même état 2.

c) Diverses manières d'écrire les relations de choc.

On peut écrire les relations de choc sous la forme (32) ou (33). A partir de (32) on peut écrire q relations pour les quantités $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ seules après avoir résolu l'équation $Q(A, B) = 0$. A partir de (33) en éliminant $A^{(2)}$ on obtient $p - q$ relations de choc pour les quantités $B^{(2)}$ et $B^{(1)}$ ($A^{(1)}$ y figure).

Mais les relations de choc les plus élégantes que l'on puisse écrire sont celles liant les variables $c_k^{(1)}$, $k = 1, 2, \ldots, q$, et les variables $c_k^{(2)}$, $k = 1, 2, \ldots, q$ définies par (I - (36)). Les premières relations dans (33) s'explicitent en :

$$a_i^{(2)} = a_i^{(1)} - \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=q+1}^{p} \Lambda_{ik} M_{kj} (b_j^{(2)} - b_j^{(1)}) \ .$$

Comme $a_i = (N, V_i)$ et $b_j = (N, W_j)$ d'après (I - (24)) et d'après (I-(36)) les relations de choc s'écrivent :

$$\begin{cases} (N^{(2)} - N^{(1)}, V_i + \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=q+1}^{p} \Lambda_{ik} M_{kj} W_j) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, q \\ N_l^{(1)} = \exp\left(\sum_{k=1}^{q} c_k^{(1)} V_{kl}\right), \quad N_l^{(2)} = \exp\left(\sum_{k=1}^{q} c_k^{(2)} V_{kl}\right) \quad l = 1, 2, \ldots, p. \end{cases}$$

ou bien sous forme symétrique :

$$(34)\begin{cases} \sum_{l=1}^{p} \exp\left(\sum_{m=1}^{q} c_m^{(2)} V_{ml}\right) \left\{V_{il} + \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=q+1}^{p} \Lambda_{ik} M_{kj} W_{jl}\right\} \\ = \sum_{l=1}^{p} \exp\left(\sum_{m=1}^{q} c_m^{(1)} V_{ml}\right) \left\{V_{il} + \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=q+1}^{p} \Lambda_{ik} M_{kj} W_{jl}\right\} \\ i = 1, 2, \ldots, q. \end{cases}$$

d) Les chocs infiniment faibles.

Soit un milieu dans un état 1 (maxwellien constant) caractérisé par exemple par les quantités $c_l^{(1)}$, $l = 1, 2, \ldots, q$. Soit ξ . Existe-il un état 2 maxwellien non identique à l'état 1 tel que les deux états 1 et 2 soient liés par les relations de choc (34) (ou (33) ou (32)) ? Autrement dit $c_l^{(1)}$, $l = 1, 2, \ldots, q$ et ξ étant donnés les équations (34) déterminent-elles $c_l^{(2)}$, $l = 1, 2, \ldots, q$, avec $c_l^{(2)}$ non identique à $c_l^{(1)}$?

Ce problème n'a pas toujours une solution : on verra sur un exemple dans le chapitre suivant que ξ doit appartenir à certains intervalles de la droite réelle liés à l'état 1. Dans le cas général on ne peut pas faire une étude aussi précise; aussi se limite-on à l'étude des chocs infiniment faibles.

Dans le paragraphe A-2 ce problème d'existence d'un état 2 a été discuté. A un état 1 donné et à une vitesse ξ assez voisine de ξ_o vitesse caractéristique du système des équations d'Euler dans le milieu 1, est associé un état 2 voisin de l'état 1.

Ce même résultat peut se trouver en appliquant le théorème 2 de l'appendice III aux q équations (34) pour les q inconnues $c_m^{(2)}$. On écrira ces q équations (34) sous la forme condensée suivante :

$$(35) \quad f_i(c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \ldots, c_q^{(2)}, \xi) = f_i(c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \ldots, c_q^{(1)}, \xi) \quad i = 1, 2, \ldots, q.$$

ξ_o vitesse de propagation d'un choc infiniment faible (voir A-2) dans le milieu 1 annule évidemment le jacobien des q fonctions $f_i(c_1^{(1)}, \ldots, c_q^{(1)}, \xi)$ par rapport aux q variables $c_m^{(1)}$. En effet :

$$\frac{\partial f_i\,(c_1^{(1)}, \ldots c_q^{(1)}, \xi)}{\partial c_m^{(1)}} = \sum_{l=1}^{p} N_l^{(1)}\, V_{ml}\, (V_{il} + \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=q+1}^{p} \Lambda_{ik}\, M_{kj}\, W_{jl})$$

On introduit les matrices $\mathbb{R}$ et $\mathbb{S}$ de type (q, q) et $(p-q, q)$ dont les éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $k^{\text{ème}}$ colonne sont respectivement :

$$R_{ik} = \sum_{l=1}^{p} N_l\, V_{il}\, V_{kl} \quad , \qquad S_{ik} = \sum_{l=1}^{p} N_l\, W_{il}\, V_{kl} \ .$$

Dans un état maxwellien on a :

$$a_i = \sum_{l=1}^{p} N_l\, V_{il} \quad , \quad b_j = \sum_{l=1}^{q} N_l\, W_{jl} \quad \text{avec} \quad N_l = \exp\Big(\sum_{m=1}^{q} c_m\, V_{ml}\Big).$$

Comme dans le paragraphe A-2 on peut considérer que les b_j sont des fonctions des a_i et écrire :

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{\partial b_j}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial c_k} = \frac{\partial b_j}{\partial c_k}$$

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{\partial b_j}{\partial a_i} \left(\sum_{l=1}^{p} N_l \, V_{kl} \, V_{il} \right) = \sum_{l=1}^{p} N_l \, V_{kl} \, W_{jl}$$

(36) soit matriciellement $\mathbb{S} = \mathbb{B}\,\mathbb{R}$.

La matrice $\mathbb{R}$ est régulière (I-(40)). La matrice jacobienne des fonctions $f_i(c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \ldots, c_q^{(1)}, \xi)$ par rapport aux variables $c_m^{(1)}$ est donc :

$$\mathbb{R}^{(1)} + \Lambda\,\mathbb{M}\,\mathbb{S}^{(1)} = (\mathbb{1}_q + \Lambda\,\mathbb{M}\,\mathbb{B}^{(1)})\,\mathbb{R}^{(1)}$$

$$= \Lambda(-\xi\,\mathbb{1}_q + \mathbb{L} - \mathbb{M}(\mathbb{W}^{(1)})^{-1}\,\mathbb{U}^{(1)})\,\mathbb{R}^{(1)}$$

car $\mathbb{U}^{(1)} + \mathbb{W}^{(1)}\,\mathbb{B}^{(1)} = 0$ d'après (7). Dans la parenthèse la matrice $-\xi\,\mathbb{1}_q + \mathbb{L} - \mathbb{M}(\mathbb{W}^{(1)})^{-1}\,\mathbb{U}^{(1)}$ est celle déjà rencontrée lors de la définition des vitesses caractéristiques du système des équations d'Euler dans le milieu 1, (9).

On examine maintenant le système des q équations (35) pour les q inconnues $c_m^{(2)}$, $m = 1, 2, \ldots, q$; ces équations dépendent de $q+1$ paramètres à savoir $c_1^{(1)}, \ldots, c_q^{(1)}$ et ξ. Les fonctions f_i sont indéfiniment dérivables par rapport à leurs arguments, sous réserve que Λ existe. On introduit le jacobien $\mathcal{J}$ des q fonctions $f_i(c_1^{(1)}, \ldots, c_q^{(1)}, \xi)$, $i = 1, 2, \ldots, q$, par rapport aux variables $c_1^{(1)}, \ldots, c_q^{(1)}$, et le jacobien $\mathcal{J}_1$ des $q-1$ fonctions $f_i(c_1^{(1)}, \ldots, c_q^{(1)}, \xi)$, $i = 1, 2, \ldots, q-1$ par rapport aux variables $c_1^{(1)}, \ldots, c_{q-1}^{(1)}$. On note par Δ_i^j le cofacteur de $f_{i,c_j^{(1)}}$ dans le déterminant $\mathcal{J}$. On suppose qu'au point $c_1^{(1)}, \ldots, c_q^{(1)}$, et ξ_o (ξ_o tel que Λ existe) on ait :

$$(37)\quad \mathcal{J}_1 \neq 0\,,\quad \mathcal{J} = 0\,,\quad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \xi} \neq 0\,,\quad \sum_{k=1}^{q} \sum_{l=1}^{q} \sum_{i=1}^{q} \Delta_q^k \, \Delta_q^l \, \Delta_i^q \, f_{i,c_k^{(1)} c_l^{(1)}} \neq 0.$$

Alors d'après l'appendice III, théorème 2, pour ξ voisin de ξ_o il existe une solution et une seule $c_m^{(2)}$, $m = 1, 2, \ldots, q$ de (35) non identique à $c_m^{(1)}$, $m = 1, 2, \ldots, q$, fonction des $c_m^{(1)}$ et de ξ, égale à $c_m^{(1)}$, $m = 1, 2, \ldots, q$ pour $\xi = \xi_o$ et indéfiniment dérivable par rapport aux variables $c_m^{(1)}$ et ξ. De plus si K est le jacobien de cette solution par rapport aux variables $c_m^{(1)}$, $m = 1, 2, \ldots, q$ on a

(38) $$\lim_{\xi \to \xi_0} K = -1$$

Soit un milieu 1 et soit ξ_0 tel que les conditions (37) soient satisfaites et que Λ existe ; d'après l'étude d'un modèle particulier faite dans le chapitre suivant ces conditions sont en général satisfaites. Soit ξ voisin de ξ_0 et considérons le choc infiniment faible se déplaçant à la vitesse ξ. Pour cette solution d'onde de choc faible il subsiste un arbitraire : lequel des deux états 1 ou 2 correspond à $\eta = +\infty$? Pour résoudre ce problème on peut, soit appliquer les conditions nécessaires de stabilité de Lax dans le milieu régi par les équations non dissipatives d'Euler [38], soit étudier l'existence d'une structure de choc dans le milieu régi par les équations cinétiques exactes.

2 - Application des conditions de stabilité de Lax dans le cas du milieu sans dissipation.

Pour pouvoir appliquer les conditions nécessaires de stabilité de Lax [38] pour le système des équations d'Euler (6), il faut pouvoir comparer la vitesse de déplacement ξ de l'onde de choc par rapport aux vitesses caractéristiques des équations d'Euler dans le milieu 1 et dans le milieu 2.

Dans les milieux 1 et 2 les polynômes donnant les vitesses caractéristiques ζ du système des équations d'Euler sont respectivement (9) :

$$P^{(1)}(\zeta) = \text{dét}(-\zeta \, \mathbb{1}_q + \mathbb{L} - \mathbb{M}\mathbb{B}^{(1)})$$

$$P^{(2)}(\zeta) = \text{dét}(-\zeta \, \mathbb{1}_q + \mathbb{L} - \mathbb{M}\mathbb{B}^{(2)})$$

$P^{(2)}(\zeta)$ dépend de ξ et de l'état 1, de même que l'état 2.

Dérivons par rapport à $c_m^{(1)}$ les relations (34) dans lesquelles les $c_m^{(2)}$ sont les fonctions des $c_m^{(1)}$ définies précédemment :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{q} \sum_{l=1}^{p} N_l^{(2)} V_{nl} \left(V_{il} + \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=q+1}^{p} \Lambda_{ik} G_{kj} W_{jl} \right) \frac{\partial c_n^{(2)}}{\partial c_m^{(1)}} \\ \qquad = \displaystyle\sum_{l=1}^{p} N_l^{(1)} V_{ml} \left(V_{il} + \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=q+1}^{p} \Lambda_{ik} G_{kj} W_{jl} \right) \\ i = 1, 2, \ldots, q, \qquad m = 1, 2, \ldots, q. \end{cases}$$

Si on appelle $\mathbb{K}^*$ la matrice de type (q, q) dont l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $k^{\text{ième}}$ colonne est $\frac{\partial c_k^{(2)}}{\partial c_i^{(1)}}$ on a :

$$(\mathbb{R}^{(2)} + \mathbb{\Lambda}\mathbb{M}\mathbb{S}^{(2)})\,\mathbb{K}^* = (\mathbb{R}^{(1)} + \mathbb{\Lambda}\mathbb{M}\mathbb{S}^{(1)})$$

d'où

$$\mathbb{\Lambda}(-\xi\,\mathbb{1}_q + \mathbb{L} - \mathbb{M}\mathbb{B}^{(2)})\,\mathbb{R}^{(2)}\mathbb{K}^* = \mathbb{\Lambda}(-\xi\,\mathbb{1}_q + \mathbb{L} - \mathbb{M}\mathbb{B}^{(1)})\mathbb{R}^{(1)}\,.$$

En prenant le déterminant des deux membres on arrive à :

$$\left[\frac{P^{(2)}(\zeta)}{P^{(1)}(\zeta)}\right]_{\zeta=\xi} = \frac{1}{K}\,\frac{\det\,\mathbb{R}^{(1)}}{\det\,\mathbb{R}^{(2)}}\,.$$

Lorsque ξ tend vers ξ_0, K tend vers -1 d'après (38); par ailleurs $c_m^{(2)}$ tend vers $c_m^{(1)}$ donc $N_l^{(2)}$ tend vers $N_l^{(1)}$ et la matrice $\mathbb{R}^{(2)}$ tend à être égale à $\mathbb{R}^{(1)}$.

(39)
$$\begin{cases} \lim\limits_{\xi\to\xi_0}\left[\dfrac{P^{(2)}(\zeta)}{P^{(1)}(\zeta)}\right]_{\zeta=\xi} = -1 \\ \left[P^{(2)}(\zeta)\,.\,P^{(1)}(\zeta)\right]_{\zeta=\xi} < 0 \qquad \text{pour } \xi \text{ voisin de } \xi_0\,. \end{cases}$$

On peut écrire $P^{(1)}(\zeta) = \varphi(\zeta, c_1^{(1)}, \ldots, c_q^{(1)})$ et $P^{(2)}(\zeta) = \varphi(\zeta, c_1^{(2)}, \ldots c_q^{(2)})$ où $\varphi(\zeta, c_1, \ldots, c_q)$ est une fonction continue de ses arguments. Pour ξ voisin de ξ_0, $c_l^{(2)}$ est voisin de $c_l^{(1)}$ pour tout $l = 1, 2, \ldots, q$, donc les coefficients des puissances de ζ dans le polynôme $P^{(2)}(\zeta)$ sont voisins des coefficients des mêmes puissances de ζ dans $P^{(1)}(\zeta)$; le coefficient de ζ^q dans les deux polynômes est $(-1)^q$. Comme on sait que les racines d'un polynôme sont des fonctions continues des coefficients, les racines de même indice des deux polynômes $P^{(1)}(\zeta)$ et $P^{(2)}(\zeta)$ sont voisines, ces racines étant ordonnées comme suit :

$$\xi_q^{(1)} \leqslant \xi_{q-1}^{(1)} \leqslant \ldots \leqslant \xi_{i+1}^{(1)} \leqslant \xi_i^{(1)} \leqslant \xi_{i-1}^{(1)} \leqslant \ldots \leqslant \xi_1^{(1)}$$

$$\xi_q^{(2)} \leqslant \xi_{q-1}^{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \xi_{i+1}^{(2)} \leqslant \xi_i^{(2)} \leqslant \xi_{i-1}^{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \xi_1^{(2)}\,.$$

(40) <u>Proposition</u>. Soit $\xi_0 = \xi_i^{(1)}$ racine simple de $P^{(1)}(\zeta) = 0$ et soit ξ voisin de ξ_0. Alors :

α) $\xi_l^{(1)}$ et $\xi_l^{(2)}$ sont voisines pour $l = 1, 2, \ldots, q$

β) $\xi_l^{(1)} - \xi$ et $\xi_l^{(2)} - \xi$ sont de même signe pour tout l distinct de i

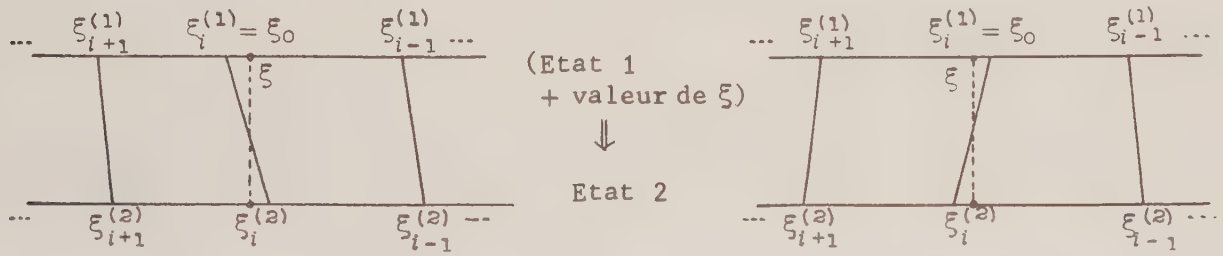
γ) $\xi_i^{(1)} - \xi$ et $\xi_i^{(2)} - \xi$ sont de signes contraires.

Il a déjà été dit que $\xi_l^{(1)}$ et $\xi_l^{(2)}$ sont voisines; β) est évident car $\xi_l^{(1)} - \xi$ et $\xi_l^{(2)} - \xi$ ne tendent pas vers 0 quand ξ tend vers ξ_0. Il n'en est pas de même pour $\xi_i^{(1)} - \xi$ et $\xi_i^{(2)} - \xi$. Comme le coefficient de

ζ^q dans $p^{(1)}(\zeta)$ et $(-1)^q$ et comme $\xi_i^{(1)}$ est racine simple de $p^{(1)}(\zeta) = 0$, $p^{(1)}(\zeta)$ est du signe de $(-1)^{q+i-1}$ pour $\zeta > \xi_i^{(1)}$ et du signe de $(-1)^{q+i}$ pour $\zeta < \xi_i^{(1)}$. On a une propriété analogue pour $p^{(2)}(\zeta)$ car $\xi_i^{(2)}$ est aussi racine simple de $p^{(2)}(\zeta) = 0$ pour $\xi - \xi_0$ assez petit.

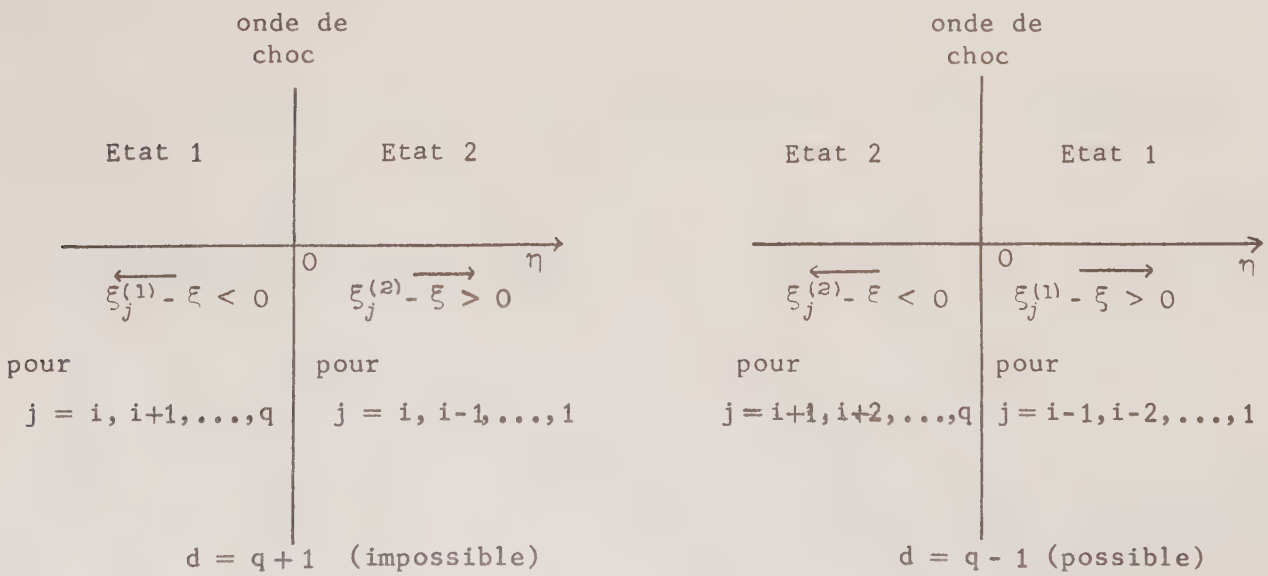
Soit $\zeta = \xi$ avec $\inf(\xi_{i-1}^{(1)}, \xi_{i-1}^{(2)}) > \xi > \xi_i^{(1)} = \xi_0$, ξ voisin de ξ_0. $p^{(1)}(\xi)$ a pour signe celui de $(-1)^{q+i-1}$; $p^{(2)}(\xi)$ a donc pour signe celui de $(-1)^{q+i}$ d'après (39) et par suite $\xi < \xi_i^{(2)}$. On raisonne de même pour $\xi_i^{(1)} > \xi$.

On peut résumer ceci sur les 2 tableaux suivants :



L'onde de choc ayant la vitesse de déplacement ξ on compte le nombre d'ondes divergentes c'est-à-dire d'ondes qui s'éloignent du plan $\eta = x - \xi t = 0$. La condition nécessaire de stabilité est $d = q - 1$.

Supposons $\xi > \xi_i^{(1)}$ et examinons les deux cas suivant que l'état 1 est à $\eta = -\infty$ ou à $\eta = +\infty$.



Pour $\xi < \xi_i^{(1)}$ on peut faire une analyse semblable.

En conclusion :

(41)

Pour $\xi > \xi_i^{(1)} = \xi_0$ les conditions de stabilité de Lax donnent l'état 1 à $\eta = +\infty$ et l'état 2 à $\eta = -\infty$

Pour $\xi < \xi_i^{(1)} = \xi_0$ les conditions de stabilité de Lax donnent l'état 1 à $\eta = -\infty$ et l'état 2 à $\eta = +\infty$.

3 - Application des conditions nécessaires d'existence d'une structure de choc dans le cas du milieu avec dissipation.

Les structures de choc s'obtiennent en étudiant les équations exactes que l'on prend sous la forme (12), les variables étant $B = b_{q+1}, \ldots, b_p$:

$$(-\xi\, \mathbb{1}_{p-q} + \mathbb{K} - \mathbb{H}\mathbb{\Lambda}\mathbb{M}) \frac{dB}{d\eta} = Q(A^{(1)} - \mathbb{\Lambda}\mathbb{M}(B - B^{(1)}), B) \tag{42}$$

ξ est pris de manière que la matrice facteur de $\frac{dB}{d\eta}$ soit régulière.

L'existence d'une structure de choc reliant deux points singuliers $B^{(1)}$ et $B^{(2)}$ peut se faire à partir de l'étude de la "nature" de ces points singuliers [5].

Etude du point singulier $B = B^{(1)}$ du système (42). On pose $B = B^{(1)} + \beta$ et on linéarise (42) pour β petit; en reprenant les calculs du paragraphe A-2 il vient :

$$(-\xi\, \mathbb{1}_{p-q} + \mathbb{K} - \mathbb{H}\mathbb{\Lambda}\mathbb{M}) \frac{d\beta}{d\eta} = (-2\,\mathbb{U}^{(1)}\mathbb{\Lambda}\mathbb{M} + 2\,\mathbb{W}^{(1)})\beta .$$

On cherche pour ce système linéaire des solutions sous la forme $\beta = \beta_0\, e^{\lambda\eta}$; il en existe si λ annule

$$\det\left[(-\xi\, \mathbb{1}_{p-q} + \mathbb{K} - \mathbb{H}\mathbb{\Lambda}\mathbb{M})\lambda - (-2\,\mathbb{U}^{(1)}\mathbb{\Lambda}\mathbb{M} + 2\,\mathbb{W}^{(1)})\right]$$

c'est-à-dire si λ est un zéro du polynôme $R^{(1)}(\lambda)$ obtenu en développant ce déterminant :

$$R^{(1)}(\lambda) = \det(-\xi\, \mathbb{1}_{p-q} + \mathbb{K} - \mathbb{H}\mathbb{\Lambda}\mathbb{M})\lambda^{p-q} + \mathbb{R}^{(1)}_{p-q-1}\lambda^{p-q-1} + \ldots$$
$$+ \mathbb{R}^{(1)}_1 \lambda + (-2)^{p-q} \det(-\mathbb{U}^{(1)}\mathbb{\Lambda}\mathbb{M} + \mathbb{W}^{(1)})$$

Soit ξ_o vérifiant les hypothèses (37) et de plus tel que Λ existe et que les coefficients de λ^{p-q} et de λ dans $R^{(1)}(\lambda)$ soient non nuls pour $\xi = \xi_o$. Alors pour $\xi = \xi_o$, $R^{(1)}(\lambda) = 0$ admet la racine $\lambda = 0$ comme racine simple, et pour ξ voisin de ξ_o $R^{(1)}(\lambda) = 0$ a une racine voisine de 0 approximativement égale à :

$$\frac{(-2)^{p-q+1}\ \det(-U^{(1)} \wedge M + W^{(1)})}{R_1^{(1)}} .$$

De même en étudiant le point singulier $B = B^{(2)}$ du système (42) on est amené à introduire le polynôme :

$$R^{(2)}(\lambda) = \det(-\xi\ \mathbb{1}_{p-q} + K - H \wedge M)\lambda^{p-q} + R^{(2)}_{p-q-1}\ \lambda^{p-q-1} + \ldots$$
$$+ R_1^{(2)}\ \lambda + (-2)^{p-q}\ \det(-U^{(2)} \wedge M + W^{(2)})$$

où les $R_i^{(2)}$, $i = 1, \ldots, p-q-1$, ont exactement la même forme en fonction des $c_l^{(2)}$, $l = 1, \ldots, q$, et de ξ que les $R_i^{(1)}$ en fonction des $c_l^{(1)}$ et de ξ.

Pour $\xi = \xi_o$, $R^{(2)}(\lambda) = 0$ admet la racine $\lambda = 0$ comme racine simple et pour ξ voisin de ξ_o $R^{(2)}(\lambda) = 0$ a une racine voisine de 0 approximativement égale à :

$$\frac{(-2)^{p-q+1}\ \det(-U^{(2)} \wedge M + W^{(2)})}{R_1^{(2)}} .$$

D'après le lemme 2 du paragraphe A-4 on peut écrire :

$$\det(-U^{(1)} \wedge M + W^{(1)}) = F^{(1)}(\xi)\ .P^{(1)}(\xi)$$

où $P^{(1)}(\xi)$ est la valeur pour $\zeta = \xi$ du polynôme $P^{(1)}(\zeta)$ dont les zéros sont les vitesses caractéristiques du système des équations d'Euler. $F^{(1)}(\xi)$ est une fraction rationnelle en ξ. Pour $\xi = \xi_o$ $P^{(1)}(\xi)$ s'annule mais $F^{(1)}(\xi_o)$ est non nul d'après le lemme 2 du paragraphe A-4. De même :

$$\det(-U^{(2)} \wedge M + W^{(2)}) = F^{(2)}(\xi).P^{(2)}(\xi)$$

où $F^{(2)}(\xi)$, $R^{(2)}(\xi)$ ont exactement la même forme en fonction des $c_l^{(2)}$, $l = 1, \ldots, q$ et de ξ que $F^{(1)}(\xi)$, $R^{(1)}(\xi)$ en fonction des $c_l^{(1)}$ et de ξ.

Pour ξ voisin de ξ_o, $c_l^{(2)}$ est voisin de $c_l^{(1)}$ pour tout $l = 1,2, \ldots, q$, donc les coefficients des puissances de λ dans le polynôme $R^{(2)}(\lambda)$ sont voisins des coefficients des mêmes puissances de λ dans le polynôme $R^{(1)}(\lambda)$; les coefficients de λ^{p-q} dans $R^{(1)}(\lambda)$ et $R^{(2)}(\lambda)$ sont non nuls. Les racines de ces deux polynômes sont donc voisines. Ces racines sont par ailleurs réelles comme on le verra dans le paragraphe suivant C-4. On a :

$$\lambda_{p-q}^{(1)} \leqslant \lambda_{p-q-1}^{(1)} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{j+1}^{(1)} \leqslant \lambda_j^{(1)} \leqslant \lambda_{j-1}^{(1)} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_1^{(1)}$$

$$\lambda_{p-q}^{(2)} \leqslant \lambda_{p-q-1}^{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{j+1}^{(2)} \leqslant \lambda_j^{(2)} \leqslant \lambda_{j-1}^{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_1^{(2)}$$

(43) **Proposition.** Soit ξ_o une racine simple de $P^{(1)}(\zeta) = 0$ telle que $\det(-\xi_o \mathbb{1}_q + \mathbb{L}) \neq 0$, $\det(-\xi_o \mathbb{1}_{p-q} + \mathbb{K} - \mathbb{H}\wedge\mathbb{M}) \neq 0$, $\mathcal{R}_1^{(1)}(\xi_o) \neq 0$
Soit ξ voisin de ξ_o; alors pour tout $l = 1, 2, \ldots, p-q$, $\lambda_l^{(1)}$ et $\lambda_l^{(2)}$ sont voisines.
Soient respectivement $\lambda_j^{(1)}$ et $\lambda_j^{(2)}$ les racines voisines de 0 de $R^{(1)}(\lambda) = 0$ et $R^{(2)}(\lambda) = 0$, elles correspondent évidemment au même indice, alors on a :

α) $\lambda_l^{(1)}$ et $\lambda_l^{(2)}$ sont de même signe pour tout l distinct de j

β) $\lambda_j^{(1)}$ et $\lambda_j^{(2)}$ sont de signes contraires.

Il a déjà été dit que $\lambda_l^{(1)}$ et $\lambda_l^{(2)}$ sont voisines; α) en résulte car $\lambda_l^{(1)}$ et $\lambda_l^{(2)}$ ne tendent pas vers 0 quand ξ tend vers ξ_o. Il n'en est pas de même pour $\lambda_j^{(1)}$ et $\lambda_j^{(2)}$. On a pour ξ voisin de ξ_o :

$$\lambda_j^{(1)} \sim (-2)^{p-q+1} \frac{F^{(1)}(\xi)\, P^{(1)}(\xi)}{\mathcal{R}_1^{(1)}(\xi)} \quad \text{et} \quad \lambda_j^{(2)} \sim (-2)^{p-q+1} \frac{F^{(2)}(\xi)\, P^{(2)}(\xi)}{\mathcal{R}_1^{(2)}(\xi)}.$$

Pour ξ voisin de ξ_o, $\mathcal{R}_1^{(1)}(\xi)$ et $\mathcal{R}_1^{(2)}(\xi)$ sont de même signe, car $\mathcal{R}_1^{(1)}(\xi_o) \neq 0$ et de même $A^{(1)}(\xi)$ et $A^{(2)}(\xi)$.

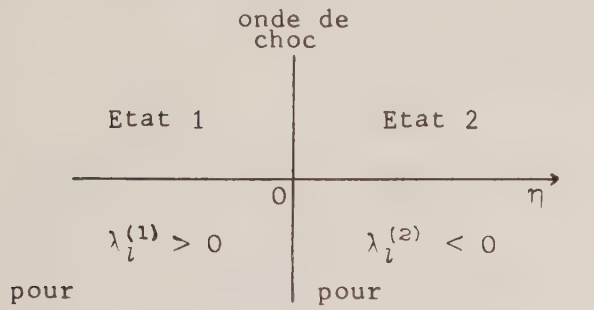
En utilisant (39) il vient :

$$\lambda_j^{(1)} \cdot \lambda_j^{(2)} < 0 .$$

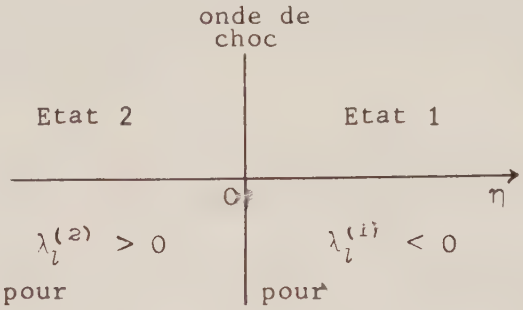
Etant donnés l'état 1 et l'état 2 séparés par une onde de choc se déplaçant avec la vitesse ξ, les conditions nécessaires d'existence d'une structure de choc sont les conditions d'existence d'une courbe intégrale reliant les deux points singuliers représentant les états 1 et 2 dans l'espace R^{p-q}, (B a p - q composantes). Autrement dit [5] le nombre de valeurs propres λ néga-

tives pour l'état se trouvant à $+\infty$, augmenté du nombre de valeurs propres λ positives pour l'état se trouvant à $-\infty$, doit être égal à $p - q + 1$.

Supposons $\lambda_j^{(1)} > 0$ et examinons les deux cas suivant que l'état 1 est à $\eta = -\infty$ ou à $\eta = +\infty$



Total : p-q+1 (possible)



Total : p-q-1 (impossible)

Pour $\lambda_j^{(1)} < 0$ on peut faire une analyse semblable.

(44)

En conclusion

Pour $\lambda_j^{(1)} > 0$ les conditions d'existence d'une structure de choc donnent l'état 1 à $\eta = -\infty$ et l'état 2 à $\eta = +\infty$

Pour $\lambda_j^{(1)} < 0$ les conditions d'existence d'une structure de choc donnent l'état 1 à $\eta = +\infty$ et l'état 2 à $\eta = -\infty$.

4 - Compatibilité des deux études précédentes

Pour que les deux conclusions des paragraphes C-2 et C-3 données en (41) et (44) soient compatibles il faut établir que :

(45)
$$\begin{cases} \xi > \xi_i^{(1)} = \xi_0 \Longrightarrow \lambda_j^{(1)} < 0 \\ \xi < \xi_i^{(1)} = \xi_0 \Longrightarrow \lambda_j^{(1)} > 0 \end{cases}$$

Il faut donc étudier de manière précise l'approximation

$$\lambda_j^{(1)} \sim (-2)^{p-q+1} \frac{F^{(1)}(\xi).P^{(1)}(\xi)}{\mathcal{R}_1^{(1)}(\xi)} .$$

La manière dont on a obtenu le polynôme en λ , $R^{(1)}(\lambda)$, n'est pas très commode pour l'étude que l'on a en vue. On remarque que pour λ tel que $R^{(1)}(\lambda) = 0$, il existe une solution de la forme $B = B^{(1)} + \beta_0 e^{\lambda\eta}$ et

$A = A^{(1)} + \alpha_o\, e^{\lambda\eta}$ pour les équations exactes linéarisées (15). Donc il existe une solution de la forme $N_l = N_l^{(1)} + V_l^o\, e^{\lambda\eta}$ pour les équations exactes (1) linéarisées c'est-à-dire pour les équations (18), soit :

$$N_i^{(1)} \left(\frac{\partial X_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial X_i}{\partial x}\right) = \sum_j I_{ij}^{(1)} X_j \quad .$$

Supprimons les indices (1) supérieurs; λ doit annuler le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} -N_1(-\xi+u_1)\lambda + I_{11} & I_{12} & I_{13} \ldots I_{1p} \\ I_{21} & -N_2(-\xi+u_2)\lambda + I_{22} & I_{23} \ldots I_{2p} \\ - - - - - - - - - & & \\ I_{p1} & I_{p2} & I_{p3} \ldots -N_p(-\xi+u_p)\lambda + I_{pp} \end{vmatrix}$$

Nous reconnaissons là le polynôme $Q(\lambda)$ défini en (28). λ doit donc être une racine de :

$$P_p(\xi)\lambda^p + P_{p-1}(\xi)\lambda^{p-1} + \ldots + P_{p-\alpha}(\xi)\lambda^{p-\alpha} + \ldots + P_q(\xi)\lambda^q = 0$$

Ce polynôme $Q(\lambda)$ a toutes ses racines réelles (voir B-2-c), résultat dont on s'est servi dans le paragraphe C-3 précédent.

Pour ξ voisin de ξ_o, $Q(\lambda) = 0$ a une racine λ_j voisine de 0 approximativement égale à

$$\lambda_j \sim -\frac{P_q(\xi)}{P_{q+1}(\xi)} \quad .$$

Les termes de plus haut degré dans $P_q(\xi)$ et dans $P_{q+1}(\xi)$ sont respectivement d'après (26)

$$\left(\prod_{l=1}^{p} N_l\right) \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_{p-q})} \left\{ \frac{1}{N_{i_1} N_{i_2} \ldots N_{i_{p-q}}} \Delta_{i_1\, i_2 \ldots i_{p-q}} \right\} \xi^q$$

$$\left(\prod_{l=1}^{p} N_l\right) \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_{p-q-1})} \left\{ \frac{1}{N_{i_1} N_{i_2} \ldots N_{i_{p-q-1}}} \Delta_{i_1\, i_2 \ldots i_{p-q-1}} \right\} \xi^{q+1}$$

Afin de connaître le signe des coefficients de ξ^q et ξ^{q+1} dans les deux termes précédents on établit le lemme suivant :

Lemme $\Delta_{i_1 i_2 \cdots i_\alpha}$ est soit nul soit du signe de $(-1)^\alpha$.

Une matrice symétrique positive a un déterminant positif ou nul. Soit une matrice $\mathcal{J}$ d'ordre α symétrique négative; $-\mathcal{J}$ est symétrique positive donc :

$$0 \leqslant \text{dét}(-\mathcal{J}) = (-1)^\alpha \text{ dét } \mathcal{J} \ .$$

La matrice carrée d'ordre α, $\mathcal{J}_{i_1 i_2 \cdots i_\alpha}$ extraite de $\mathbb{I}$, ci-dessous

$$\mathcal{J}_{i_1 i_2 \cdots i_\alpha} = \begin{Vmatrix} I_{i_1 i_1} & I_{i_1 i_2} & \cdots & I_{i_1 i_\alpha} \\ I_{i_2 i_1} & I_{i_2 i_2} & \cdots & I_{i_2 i_\alpha} \\ - & - & - & - \\ I_{i_\alpha i_1} & I_{i_\alpha i_2} & \cdots & I_{i_\alpha i_\alpha} \end{Vmatrix} \ ,$$

est symétrique. Elle est aussi négative car d'après (22) :

$$(\bar{x}_{i_1}, \cdots, \bar{x}_{i_\alpha})\ \mathcal{J}_{i_1 i_2 \cdots i_\alpha} \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_\alpha} \end{pmatrix} = (0 \,..\, 0\ \bar{x}_{i_1} \cdots \bar{x}_{i_\alpha}\ 0 \ldots 0)\ \mathbb{I} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_\alpha} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leqslant 0 \ .$$

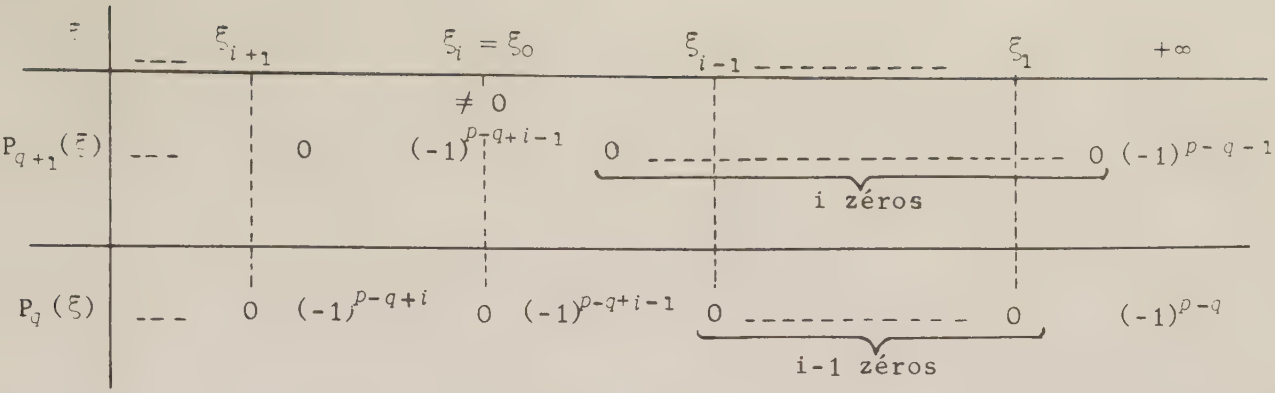
Donc $(-1)^\alpha$ dét $\mathcal{J}_{i_1 i_2 \cdots i_\alpha} = (-1)^\alpha \Delta_{i_1 i_2 \cdots i_\alpha} \geqslant 0$.

Conséquence

La matrice $\mathbb{I}$ est de rang q donc tous les $\Delta_{i_1 i_2 \cdots i_{p-q}}$ et $\Delta_{i_1 i_2 \cdots i_{p-q-1}}$ ne sont pas nuls. Les coefficients de ξ^q et ξ^{q+1} dans $P_q(\xi)$ et $P_{q+1}(\xi)$ sont donc non nuls et sont respectivement du signe de $(-1)^{p-q}$ et $(-1)^{p-q-1}$.

(46) Théorème. Soit ξ_0 racine simple de $P_q(\xi) = 0$ telle que $P_{q+1}(\xi_0) \neq 0$. Soit ξ voisin de ξ_0.
Alors $\lambda_j \sim -\dfrac{P_q(\xi)}{P_{q+1}(\xi)}$ est tel que $\lambda_j(\xi - \xi_0) < 0$.

Ce théorème résulte du tableau ci-dessous où l'on a indiqué les signes suivant ξ de $P_q(\xi)$ et $P_{q+1}(\xi)$ en utilisant les signes de ces polynômes pour ξ tendant vers $+\infty$ et le fait que les zéros tous réels de $P_q(\xi)$ séparent les zéros tous réels de $P_{q+1}(\xi)$. Les relations (45) sont une conséquence directe de ce théorème.



5 - Interprétation des résultats.

Whitham dans un article [43] envisage pour une fonction inconnue h, l'équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants de la forme

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_1^{(n)} \frac{\partial}{\partial x}\right) \cdots \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_n^{(n)} \frac{\partial}{\partial x}\right)h + \lambda\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_1^{(n-1)} \frac{\partial}{\partial x}\right) \cdots \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_{n-1}^{(n-1)} \frac{\partial}{\partial x}\right)h = 0$$

avec

$$\lambda > 0 , \qquad c_1^{(n)} > c_1^{(n-1)} > c_2^{(n)} > c_2^{(n-1)} > \cdots > c_n^{(n)} .$$

Ces inégalités sont nécessaires pour assurer la stabilité des solutions de l'équation . Les termes dérivés d'ordre le plus bas décrivent la propagation de la perturbation principale pour des temps grands, cette perturbation se propageant avec l'une des vitesses $c_i^{(n-1)}$.

On est en présence ici de l'équation $\Delta h = 0$ qui s'écrit (21) comme une somme de $p - q + 1$ groupements homogènes d'ordre p , $p - 1, \ldots , q$: $\Lambda = \Delta_p + \Delta_{p-1} + \ldots + \Delta_q$. Le coefficient de $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$ dans Δ_α est :

$$(-1)^\alpha \left(\prod_{l=1}^{p} N_l\right) \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_{p-\alpha})} \frac{1}{N_{i_1} N_{i_2} \cdots N_{i_{p-\alpha}}} \Delta_{i_1 i_2 \cdots i_{p-\alpha}}$$

coefficient qui est donc positif d'après le lemme établi dans le paragraphe C-4. Par ailleurs les vitesses caractéristiques de chaque opérateur Δ_α sont réelles et celles de l'opérateur Δ_α séparent celles de $\Delta_{\alpha+1}$. Cette équation $\Delta h = 0$ avec ses propriétés constituent une généralisation de l'équation de Whitham.

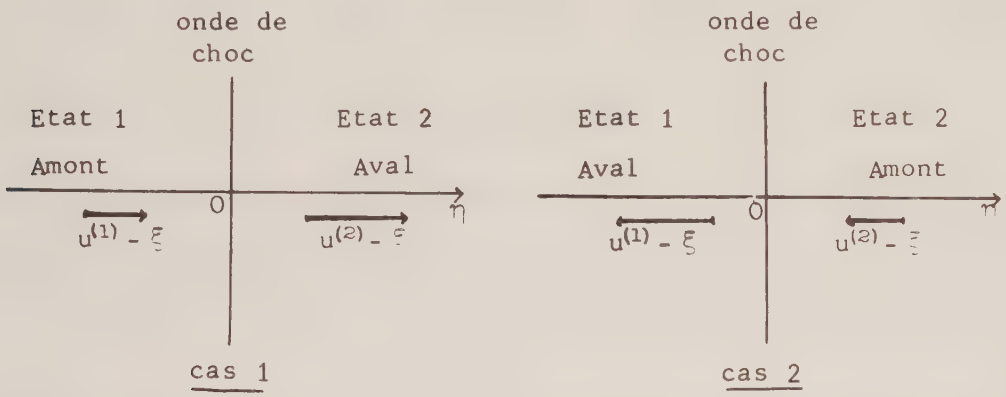
Les vitesses caractéristiques des termes dérivés d'ordre le plus bas Δ_q sont aussi les vitesses caractéristiques du système des équations d'Euler et sont comme on l'a vu, importantes dans l'étude des propagations des ondes de choc. Les ondes de choc infiniment faibles se propagent dans le milieu 1 avec ces vitesses; de même que Broadwell [2] nous dirons que les vitesses $\xi_i^{(1)} - u^{(1)}$ sont les vitesses de propagation du son dans le milieu (1).

Le modèle étudié représente un gaz dont la densité est n et la vitesse macroscopique u. L'équation de la conservation de la masse (I-(31)) conduit à une relation de choc à savoir :

$$n^{(1)}\,(u^{(1)} - \xi) \;=\; n^{(2)}\,(u^{(2)} - \xi) \tag{47}$$

Soit $\xi < \xi_i^{(1)}$ avec ξ voisin de $\xi_i^{(1)}$ et considérons le choc infiniment faible correspondant. D'après les paragraphes C-3 et C-4 l'état 1 est à $\eta = -\infty$ et l'état 2 à $\eta = +\infty$.

On distingue deux cas suivant que $u^{(1)} - \xi$ est positif ou négatif ($u^{(2)} - \xi$ est alors positif ou négatif d'après (47)) c'est-à-dire suivant que l'état amont est à $-\infty$ ou à $+\infty$.



Les vitesses des particules de l'état amont par rapport au choc sont supersoniques car $|u^{(1)} - \xi| > |u^{(1)} - \xi_i^{(1)}|$ dans le premier cas et car $|u^{(2)} - \xi| > |u^{(2)} - \xi_i^{(2)}|$ dans le second cas; pour ce second cas on se sert du fait que $\xi_i^{(1)} - \xi$ et $\xi_i^{(2)} - \xi$ sont de signes contraires (40), de plus ces inégalités sont vraies car ξ et $\xi_i^{(1)}$ sont voisines. De même on peut dire que les vitesses des particules de l'état aval par rapport au choc sont subsoniques. Ceci est conforme aux résultats connus en dynamique des gaz.

Remarque. Si on cherche des solutions ne dépendant que de la variable $\eta = x - \xi t$ pour les équations exactes (1) et si on introduit la fonction

$$H_1 \;=\; \sum_i \;(-\xi + u_i)\; N_i \;\mathrm{Log}\; N_i$$

on a $$\frac{dH_1}{dt} \;=\; \sum_i \;(-\xi + u_i)\;\frac{dN_i}{d\eta}\;(1 + \mathrm{Log}\; N_i)$$

or $$\frac{dN_i}{d\eta} \;=\; \mathcal{F}_i\;(N, N)$$

donc $$\frac{dH_1}{d\eta} \;=\; (\mathrm{Log}\, N,\;\; \mathcal{F}(N, N)) \;\leqslant\; 0$$

En conclusion $H_1\;(\eta = -\infty) \;\geqslant\; H_1(\eta = +\infty)$.

CHAPITRE IV

ETUDE DU MILIEU CORRESPONDANT AU CAS D'UN MODELE PLAN REGULIER A SIX VITESSES

Dans ce chapitre on envisage un modèle plan régulier à six vitesses de même module. Bien que ce modèle soit très simple, l'obtention des équations de Navier-Stokes par application du formalisme de Chapman - Enskog nécessite des calculs relativement compliqués. Dans ces équations elles-mêmes compliquées figurent les directions privilégiées du modèle.

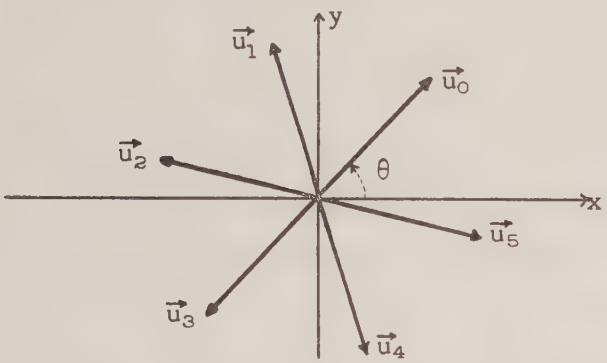
L'étude de la propagation d'une onde de choc dans un tel milieu est faite par trois approches différentes : à partir des équations d'Euler du milieu et par application des conditions de stabilité de Lax; à partir des équations exactes ; à partir des équations appropriées de Navier-Stokes. Dans les deux derniers cas on étudie l'existence d'une structure pour l'onde de choc. Il est à noter que pour ce modèle on a pu faire une étude globale complétant ainsi les résultats locaux obtenus dans le chapitre III.

Enfin on compare dans un cas particulier les structures d'une onde de choc obtenues à partir des équations exactes et à partir des équations de Navier-Stokes.

1ère partie - APPLICATION DE LA THEORIE GENERALE

A - MODELE. NOTATIONS

On s'intéresse ici au modèle plan régulier à 6 vitesses de même module décrit dans (I - § E-2)



$$\vec{u_i} = (u_i , v_i)$$
$$= (c \cos(\theta + i\frac{\pi}{3}) , c \sin(\theta + i\frac{\pi}{3})).$$

On fait une hypothèse d'équiprobabilité : les particules de vitesses $\vec{u_i}$, $\vec{u}_{i+3}$ donnent après collision les particules de vitesses $\vec{u}_{i+1}$, $\vec{u}_{i+1+3}$ avec la probabilité 1/3. C'est l'hypothèse formulée par Harris dans [28]. Les équations (I - (43)) s'écrivent ici :

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial N_i}{\partial t} + \vec{u_i} . \overrightarrow{\nabla N_i} = \dfrac{B}{3} (N_{i+1} N_{i+4} + N_{i+2} N_{i+5} - 2 N_i N_{i+3}) \\ i = 0, 1, \ldots , 5 ; \qquad B = 2 c S . \end{cases}$$

Notations

Le milieu possède des directions privilégiées définies par l'angle θ. Ceci justifie l'introduction des quantités suivantes qui apparaîtront dans les calculs :

$$(2) \quad \begin{cases} \vec{e_0} = (\cos\theta , \sin\theta) \qquad \vec{e_1} = (-\sin\theta \quad \cos\theta) \\ \mathbb{E}_0 = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \qquad \mathbb{E}_1 = \begin{pmatrix} \sin 2\theta & -\cos 2\theta \\ -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \end{pmatrix} \end{cases}$$

B - INVARIANTS DES RENCONTRES. EQUATIONS DE CONSERVATION.

a) Espace des invariants des rencontres $\mathbb{F}$; espace $\mathbb{F}^\perp$

L'espace des invariants des rencontres est ici de dimension 4 (I - § E-2-c) les vecteurs de $\mathbb{F}$ étant les solutions du système : $\varphi_0 + \varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_5$.

1er choix d'une base orthonormée dans $\mathbb{F}$: parmi les invariants des rencontres linéairement indépendants on choisit ceux correspondant à la conservation de la masse et à la conservation de la quantité de mouvement ; le quatrième est alors défini. Ce choix est intéressant car parmi les grandeurs macroscopiques associées figurent la densité et la vitesse du gaz.

2ème choix d'une base orthonormée dans $\mathbb{F}$: il y a une base orthonormée dans $\mathbb{F}$ relativement simple, indépendante de l'angle θ et commode pour les calculs ; elle correspond aux invariants des rencontres suivants : (1, 1, 1, 1, 1, 1), (0, -1, 0, 0, 1, 0) , (1, 0, 0, -1, 0, 0) et (0, 0, 1, 0, 0, -1).

Détermination de $\mathbb{F}^\perp$: ce sont les vecteurs de $\mathbb{R}^6$ orthogonaux à $\mathbb{F}$. Comme il est facile de le voir $\mathbb{F}^\perp$ est engendré par les deux vecteurs orthogonaux (-2, 1, 1, -2, 1, 1) et (0, 1, -1, 0, 1, -1).

b) Proposition de deux choix de bases orthonormées dans $\mathbb{R}^6$

Choix I

$$\text{Base de } \mathbb{F} \begin{cases} V_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} (1, 1, 1, 1, 1, 1) \\ V_1 = \frac{1}{\sqrt{3c^2}} (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) \\ V_2 = \frac{1}{\sqrt{3c^2}} (v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) \\ V_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} (1, -1, 1, -1, 1, -1) \end{cases} \tag{3}$$

$$\text{Base de } \mathbb{F}^\perp \begin{cases} W_4 = \frac{1}{\sqrt{12}} (-2, 1, 1, -2, 1, 1) \\ W_5 = \frac{1}{2} (0, 1, -1, 0, 1, -1) \end{cases}$$

en conséquence :

$$N = a_0 V_0 + a_1 V_1 + a_2 V_2 + a_3 V_3 + b_4 W_4 + b_5 W_5$$

$$\begin{cases} a_0 = (N, V_0) = \dfrac{n}{\sqrt{6}} \\ a_1 = (N, V_1) = \dfrac{1}{\sqrt{3c^2}}\, nu \qquad b_4 = (N, W_4) \\ a_2 = (N, V_2) = \dfrac{1}{\sqrt{3c^2}}\, nv \qquad b_5 = (N, W_5) \\ a_3 = (N, V_3) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\, n\delta \end{cases}$$

Choix II

(4) Base de $\mathbb{F}$ $\begin{cases} V_0 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 1, 1, 1, 1) \\ V_1' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1, 0, 0) \\ V_2' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, 0, 0, -1) \\ V_3' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 0, 0, 1, 0) \end{cases}$ Base de $\mathbb{F}^1$ $\begin{cases} W_4 = \dfrac{1}{\sqrt{12}}(-2, 1, 1, -2, 1, 1) \\ W_5 = \dfrac{1}{2}(0, 1, -1, 0, 1, -1) \end{cases}$

en conséquence :

$$N = a_0 V_0 + a_1' V_1' + a_2' V_2' + a_3' V_3' + b_4 W_4 + b_5 W_5$$

$$\begin{cases} a_0 = (N, V_0) = \dfrac{n}{\sqrt{6}} \\ a_1' = (N, V_1') = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, n\alpha \qquad b_4 = (N, W_4) \\ a_2' = (N, V_2') = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, n\beta \qquad b_5 = (N, W_5) \\ a_3' = (N, V_3') = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, n\gamma \end{cases}$$

Les quantités sans dimensions, δ, α, β, γ sont introduites en vue des calculs ultérieurs (aucune confusion ne sera faite avec les quantités α et δ introduites dans le chapitre II). On donne enfin les expressions explicites de α, β, γ, u, v, δ en fonction des N_i et les relations de passage des quantités α, β, γ aux quantités u, v, δ :

$$(5)\quad \begin{cases} n\alpha = N_0 - N_3 \\ n\beta = N_2 - N_5 \\ n\gamma = N_4 - N_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} nu = N_0 u_0 + N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 + N_5 u_5 \\ n\,v = N_0 v_0 + N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4 + N_5 v_5 \\ n\,\delta = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + N_4 - N_5 \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} u = \alpha u_0 + \beta u_2 + \gamma u_4 \\ v = \alpha v_0 + \beta v_2 + \gamma v_4 \\ \delta = \alpha + \beta + \gamma \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3}\left(\delta + \frac{2}{c^2}\,\vec{u}.\vec{u_0}\right) \\ \beta = \frac{1}{3}\left(\delta + \frac{2}{c^2}\,\vec{u}.\vec{u_2}\right) \\ \gamma = \frac{1}{3}\left(\delta + \frac{2}{c^2}\,\vec{u}.\vec{u_4}\right) \end{cases}$$

c) Equations de conservation

On a quatre équations de conservation linéairement indépendantes associées à quatre invariants des rencontres Φ linéairement indépendants (I-§ C-3)

$$(7)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\,(N, \Phi) + \vec{\nabla}.\left(\sum_k \vec{u_k}\, N_k\, \varphi_k\right) = 0 \ .$$

Des calculs élémentaires permettent d'écrire :

$$(\ldots, \vec{u_k}\, V_{0k}, \ldots) = \frac{\vec{u_0}}{\sqrt{3}}\, V_1' + \frac{\vec{u_2}}{\sqrt{3}}\, V_2' + \frac{\vec{u_4}}{\sqrt{3}}\, V_3'$$

$$(\ldots, \vec{u_k}\, V_{1k}', \ldots) = \vec{u_0}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\, V_0 - \frac{2}{\sqrt{6}}\, W_4\right)$$

$$(\ldots, \vec{u_k}\, V_{2k}', \ldots) = \vec{u_2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\, V_0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\, W_4 - \frac{1}{\sqrt{2}}\, W_5\right)$$

$$(\ldots, \vec{u_k}\, V_{3k}', \ldots) = \vec{u_4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\, V_0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\, W_4 + \frac{1}{\sqrt{2}}\, W_5\right)$$

et si on prend pour Φ dans (7) les vecteurs de la base de $\mathbf{F}$ dans le choix II on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\,(N, V_0) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\vec{u_0}\,.\,\vec{\nabla}(N, V_1') + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\vec{u_2}\,.\,\vec{\nabla}(N, V_2') + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\vec{u_4}\,.\,\vec{\nabla}(N, V_3') = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\,(N, V_1') + \vec{u_0}\,.\,\vec{\nabla}\left(N, \frac{1}{\sqrt{3}}\, V_0 - \frac{2}{\sqrt{6}}\, W_4\right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\,(N, V_2') + \vec{u_2}\,.\,\vec{\nabla}\left(N, \frac{1}{\sqrt{3}}\, V_0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\, W_4 - \frac{1}{\sqrt{2}}\, W_5\right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\,(N, V_3') + \vec{u_4}\,.\,\vec{\nabla}\left(N, \frac{1}{\sqrt{3}}\, V_0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\, W_4 + \frac{1}{\sqrt{2}}\, W_5\right) = 0 \end{cases}$$

Les équations de conservation pour les grandeurs n, α, β, γ sont donc :

$$(8)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} n + \vec{\nabla}.(n\alpha\vec{u}_0 + n\beta\vec{u}_2 + n\gamma\vec{u}_4) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(n\alpha) + \vec{u}_0 . \vec{\nabla}(\frac{n}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} b_4) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(n\beta) + \vec{u}_2 . \vec{\nabla}(\frac{n}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} b_4 - b_5) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(n\gamma) + \vec{u}_4 . \vec{\nabla}(\frac{n}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} b_4 + b_5) = 0 \ . \end{cases}$$

A partir des équations (8) et des formules (6) il est possible de déduire les équations de conservation pour les grandeurs n, $\vec{u}$ et δ ; on fait la combinaison $\vec{u}_0$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_4$ d'une part, et la combinaison $1, 1, 1$ d'autre part sur les trois dernières équations de (8) d'où :

$$\frac{\partial}{\partial t}(n\vec{u}) + \frac{1}{3}(\vec{u}_0\vec{u}_0 + \vec{u}_2\vec{u}_2 + \vec{u}_4\vec{u}_4).\vec{\nabla}n + \frac{1}{\sqrt{3}}(-2\vec{u}_0\vec{u}_0 + \vec{u}_2\vec{u}_2 + \vec{u}_4\vec{u}_4).\vec{\nabla}b_4 + (-\vec{u}_2\vec{u}_2 + \vec{u}_4\vec{u}_4).\vec{\nabla}b_5 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(n\delta) + \frac{1}{3}(\vec{u}_0 + \vec{u}_2 + \vec{u}_4).\vec{\nabla}n + \frac{1}{\sqrt{3}}(-2\vec{u}_0 + \vec{u}_2 + \vec{u}_4).\vec{\nabla}b_4 + (-\vec{u}_2 + \vec{u}_4).\vec{\nabla}b_5 = 0.$$

En définitive on a :

$$(9)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} n + \vec{\nabla}.(n\vec{u}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(n\vec{u}) + \frac{c^2}{2}\vec{\nabla}n - \frac{\sqrt{3}}{2} c^2 \mathbf{E}_0 . \vec{\nabla}b_4 - \frac{\sqrt{3}}{2} c^2 \mathbf{E}_1 . \vec{\nabla}b_5 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(n\delta) - \sqrt{3}\, c\, \vec{e}_0 . \vec{\nabla}b_4 - \sqrt{3}\, c\, \vec{e}_1 . \vec{\nabla}b_5 = 0 \end{cases}$$

Les équations (8) sont évidemment inchangées si on change l'orientation du plan car cela revient à changer y, v, θ et b_5 en leurs opposées les autres quantités demeurant inchangées. De même les équations (8) sont inchangées dans tout changement de repère direct.

C - L'ETAT MAXWELLIEN

1 - Quelques remarques d'ordre géométrique en liaison avec le fait que les densités N_i sont positives.

(10) On pose $\quad b_4 = \frac{n}{\sqrt{3}} X \qquad b_5 = \frac{n}{\sqrt{3}} Y$

N dans la base II (formules (4)) s'écrit :

$$N = \frac{n}{\sqrt{6}} V_0 + \frac{n}{\sqrt{2}} (\alpha V_1' + \beta V_2' + \gamma V_3') + \frac{n}{\sqrt{3}} (X W_4 + Y W_5)$$

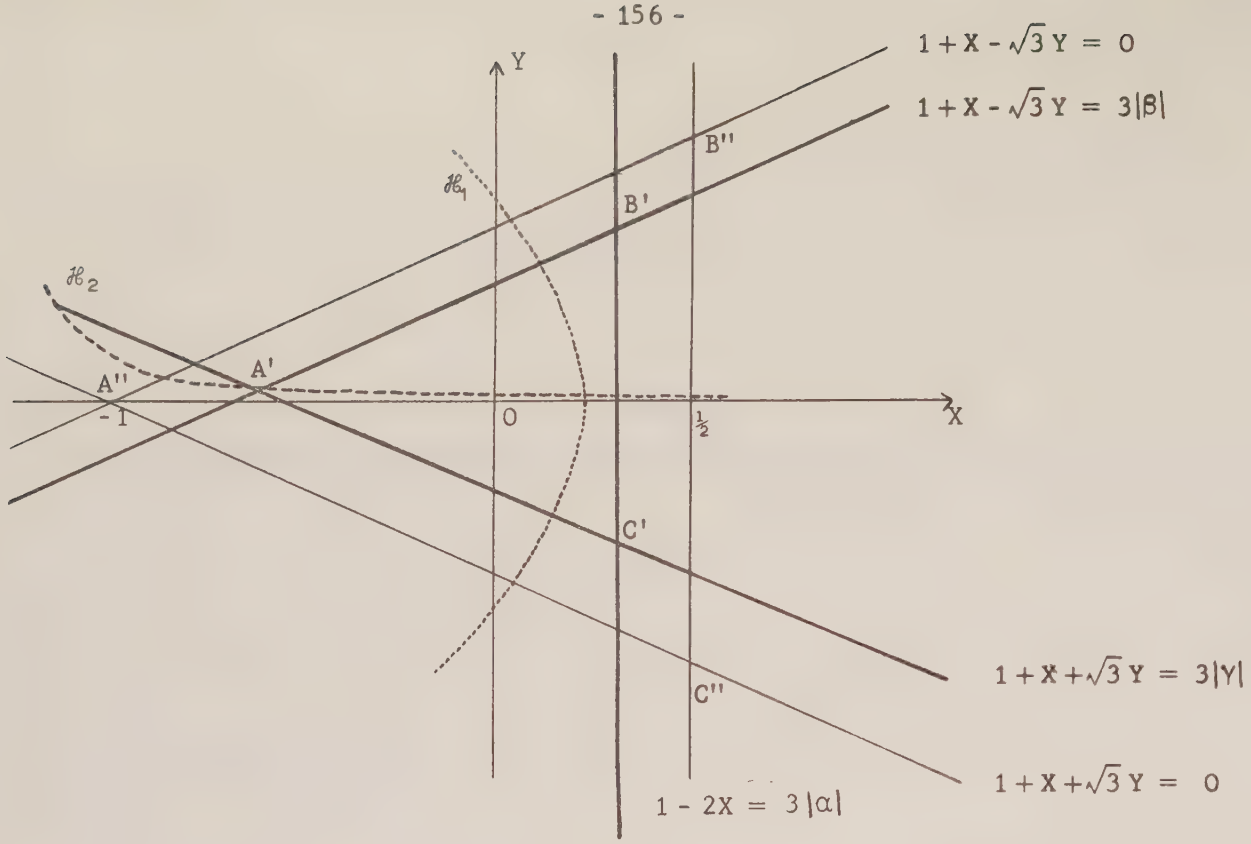
soit en explicitant :

$$(11) \quad \begin{cases} N_0 = \frac{n}{6}(1 + 3\alpha - 2X) & N_3 = \frac{n}{6}(1 - 3\alpha - 2X) \\ N_1 = \frac{n}{6}(1 - 3\gamma + X + \sqrt{3}Y) & N_4 = \frac{n}{6}(1 + 3\gamma + X + \sqrt{3}Y) \\ N_2 = \frac{n}{6}(1 + 3\beta + X - \sqrt{3}Y) & N_5 = \frac{n}{6}(1 - 3\beta + X - \sqrt{3}Y) \end{cases}$$

Dire que les 6 densités N_i sont positives est équivalent à dire que les 6 quantités $N_0 + N_3$, $N_0 N_3$, $N_1 + N_4$, $N_1 N_4$, $N_2 + N_5$, $N_2 N_5$ sont positives, c'est-à-dire :

$$(12) \quad n > 0 \quad \begin{cases} 1 - 2X > 0 \\ 1 + X + \sqrt{3}Y > 0 \\ 1 + X - \sqrt{3}Y > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (1 - 2X)^2 > 9\alpha^2 \\ (1 + X + \sqrt{3}Y)^2 > 9\gamma^2 \\ (1 + X - \sqrt{3}Y)^2 > 9\beta^2 \end{cases}$$

Le second groupe d'inégalités se résoud géométriquement dans le plan (X, Y); les points (X, Y) solutions sont intérieurs au triangle $A'' B'' C''$. Soit α, β, γ tels que $0 < |\alpha| + |\beta| + |\gamma| < 1$ alors on peut trouver des points (X, Y) vérifiant (12); ce sont les points intérieurs au triangle $A' B' C'$ celui-ci étant comme indiqué sur la figure et contenant l'origine.



Conclusion. n, α, β, γ (ou bien n, $\vec{u}$, δ) représente effectivement un état macroscopique si et seulement si $n > 0$ et $0 < |\alpha| + |\beta| + |\gamma| < 1$ (ou bien $n > 0$ et $0 < \left|\delta + 2\frac{\vec{u}.\vec{u}_0}{c^2}\right| + \left|\delta + 2\frac{\vec{u}.\vec{u}_2}{c^2}\right| + \left|\delta + 2\frac{\vec{u}.\vec{u}_4}{c^2}\right| < 1$).

Etant donné un état macroscopique défini par n, $\vec{u}$, δ ou bien par n, α, β, γ il existe une infinité d'états microscopiques compatibles avec, autant que de points dans le triangle A' B' C'.

2 - Existence et unicité de l'état maxwellien associé à un état macroscopique

L'état maxwellien est caractérisé ici par : $N_0 N_3 = N_1 N_4 = N_2 N_5$. Si on choisit comme grandeurs macroscopiques n, α, β, γ, dans l'état maxwellien associé X, Y sont solutions des équations ci-dessous obtenues en utilisant les formules (11)

$$(13) \qquad (1-2X)^2 - 9\alpha^2 = (1+X-\sqrt{3}Y)^2 - 9\beta^2 = (1+X+\sqrt{3}Y)^2 - 9\gamma^2$$

ou bien

$$(14) \qquad \begin{cases} X^2 - Y^2 - 2X = \frac{3}{2}(2\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2) \\ (X+1)Y = \frac{3\sqrt{3}}{4}(\gamma^2 - \beta^2) \end{cases} .$$

Appelons $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ les deux hyperboles d'équations respectivement la première et la seconde des équations (14). Le point A' est sur $\mathcal{H}_2$ et les points B' et C' sont de part et d'autre de $\mathcal{H}_2$; ces remarques permettent le tracé de $\mathcal{H}_2$ à l'intérieur du triangle A' B' C' (figure dans le paragraphe C-1). Par ailleurs il est facile de voir que l'équation aux X des points de rencontre de $\mathcal{H}_1$ et de $\mathcal{H}_2$ a quatre racines réelles dont une et une seule entre $X_{A'}$ et $X_{B'} = X_{C'}$. Les hyperboles $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ ont donc un point d'intersection et un seul à l'intérieur du triangle A' B' C'. Ce point correspond à l'état maxwellien associé à l'état macroscopique représenté par n, α, β, γ. Ce résultat constitue une vérification du résultat général établi dans (I-§ D-2) à savoir qu'à un état macroscopique donné est associé un et un seul état maxwellien.

D - METHODE DE CHAPMAN - ENSKOG

Le but de ce paragraphe est d'obtenir les équations d'Euler et les équations de Navier-Stokes pour le gaz à répartition discrète de vitesses, celles-ci étant les 6 vitesses précisées au début de ce chapitre. On utilise la méthode de Chapman Enskog décrite dans le cas général dans la 1ère partie du chapitre II.

1 - La première approximaximation $N^{(o)}$

D'après (II - (16)) les densités $N_i^{(o)}$ sont localement maxwelliennes, autrement dit $N^{(o)}$ s'exprime uniquement en fonction de quatre variables macroscopiques que l'on choisit pour la commodité des calculs comme étant n, α, β, γ. On a donc d'après le paragraphe C :

$$(15) \quad N^{(o)} = \frac{n}{\sqrt{6}} V_o + \frac{n}{\sqrt{2}} \alpha V_1' + \frac{n}{\sqrt{2}} \beta V_2' + \frac{n}{\sqrt{2}} \gamma V_3' + \frac{n}{\sqrt{3}} X^{(o)} W_4 + \frac{n}{\sqrt{3}} Y^{(o)} W_5$$

$$(16) \quad \begin{cases} N_0^{(o)} = \frac{n}{6}(1 + 3\alpha - 2X^{(o)}) & N_3^{(o)} = \frac{n}{6}(1 - 3\alpha - 2X^{(o)}) \\ N_2^{(o)} = \frac{n}{6}(1 + 3\beta + X^{(o)} - \sqrt{3}\, Y^{(o)}) & N_5^{(o)} = \frac{n}{6}(1 - 3\beta + X^{(o)} - \sqrt{3}\, Y^{(o)}) \\ N_4^{(o)} = \frac{n}{6}(1 + 3\gamma + X^{(o)} + \sqrt{3}\, Y^{(o)}) & N_1^{(o)} = \frac{n}{6}(1 - 3\gamma + X^{(o)} + \sqrt{3}\, Y^{(o)}) \end{cases}$$

avec :

$$(17)\quad (1-2X^{(0)})^2 - 9\alpha^2 = (1+X^{(0)}-\sqrt{3}Y^{(0)})^2 - 9\beta^2 = (1+X^{(0)}+\sqrt{3}Y^{(0)})^2 - 9\gamma^2 .$$

D'après la théorie générale l'équation pour $N^{(1)}$ n'est soluble que si certaines conditions de compatibilité sont satisfaites à savoir (II-(17)) ce qui dans cet exemple donne, moyennant un petit changement de notations,

$$(18)\quad \frac{1}{\sqrt{6}} F_0^{(0)} + (\mathcal{A}N^{(0)}, V_0) = 0 \ , \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} F_i^{(0)} + (\mathcal{A}N^{(0)}, V_i') = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

soit d'après la forme des équations de conservation (8) et d'après (10) et (16)

$$(19)\quad \begin{cases} F_0^{(0)} + \vec{\nabla}.(n\alpha\vec{u}_0 + n\beta\vec{u}_2 + n\gamma\vec{u}_4) = 0 \\ F_1^{(0)} + \vec{u}_0 . \vec{\nabla}(\frac{n}{3}(1-2X^{(0)})) = 0 \\ F_2^{(0)} + \vec{u}_2 . \vec{\nabla}(\frac{n}{3}(1+X^{(0)}-\sqrt{3}Y^{(0)})) = 0 \\ F_3^{(0)} + \vec{u}_4 . \vec{\nabla}(\frac{n}{3}(1+X^{(0)}+\sqrt{3}Y^{(0)})) = 0 . \end{cases}$$

En remplaçant $F_0^{(0)}$, $F_1^{(0)}$, $F_2^{(0)}$, $F_3^{(0)}$ par $\frac{\partial n}{\partial t}$, $\frac{\partial(n\alpha)}{\partial t}$, $\frac{\partial(n\beta)}{\partial t}$, $\frac{\partial(n\gamma)}{\partial t}$ dans (18) on obtient les équations d'Euler du milieu, (II-(19)).

2 - Introduction de L

L'équation donnant $N^{(1)}$ s'écrit d'après (II-(14)) :

$$(20)\quad 2\mathcal{F}(N^{(0)}, N^{(1)}) = \frac{\partial N^{(0)}}{\partial n} F_0^{(0)} + \frac{\partial N^{(0)}}{\partial(n\alpha)} F_1^{(0)} + \frac{\partial N^{(0)}}{\partial(n\beta)} F_2^{(0)} + \frac{\partial N^{(0)}}{\partial(n\gamma)} F_3^{(0)} + \mathcal{A}N^{(0)}.$$

On désigne par L le second membre de cette équation. Compte tenu des conditions de compatibilité (19), L est dans $\mathbb{F}^{\perp}$:

$$(21)\quad L = \mu_4 W_4 + \mu_5 W_5$$

$\mathcal{A}N^{(0)}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^6$ que l'on peut décomposer suivant la base V_0, V_1', V_2', V_3', W_4, W_5 en se servant de (18) :

$$\mathcal{A}N^{(0)} = -\left[\frac{1}{\sqrt{6}} F_0^{(0)} V_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{3} F_i^{(0)} V_i'\right] + (\mathcal{A}N^{(0)}, W_4)W_4 + (\mathcal{A}N^{(0)}, W_5)W_5 .$$

Par ailleurs en utilisant (15) :

$$\frac{\partial N^{(o)}}{\partial n} F_o^{(o)} + \frac{\partial N^{(o)}}{\partial(n\alpha)} F_1^{(o)} + \frac{\partial N^{(o)}}{\partial(n\beta)} F_2^{(o)} + \frac{\partial N^{(o)}}{\partial(n\gamma)} F_3^{(o)} = \frac{1}{\sqrt{6}} F_o^{(o)} V_o + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{3} F_i^{(o)} V_i' +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}} X^{(o)} F_o^{(o)} W_4 + \frac{1}{\sqrt{3}} \Big[\frac{\partial X^{(o)}}{\partial \alpha} (F_1^{(o)} - \alpha F_o^{(o)}) + \frac{\partial X^{(o)}}{\partial \beta} (F_2^{(o)} - \beta F_o^{(o)}) +$$

$$+ \frac{\partial X^{(o)}}{\partial \gamma} (F_3^{(o)} - \gamma F_o^{(o)}) \Big] W_4 + \frac{1}{\sqrt{3}} Y^{(o)} F_o^{(o)} W_5 + \frac{1}{\sqrt{3}} \Big[\frac{\partial Y^{(o)}}{\partial \alpha} (F_1^{(o)} - \alpha F_o^{(o)}) +$$

$$+ \frac{\partial Y^{(o)}}{\partial \beta} (F_2^{(o)} - \beta F_o^{(o)}) + \frac{\partial Y^{(o)}}{\partial \gamma} (F_3^{(o)} - \gamma F_o^{(o)}) \Big] W_5$$

d'où

$$L = \frac{1}{\sqrt{3}} \Big\{ X^{(o)} F_o^{(o)} + \frac{\partial X^{(o)}}{\partial \alpha} (F_1^{(o)} - \alpha F_o^{(o)}) + \frac{\partial X^{(o)}}{\partial \beta} (F_2^{(o)} - \beta F_o^{(o)}) + \frac{\partial X^{(o)}}{\partial \gamma} (F_3^{(o)} - \gamma F_o^{(o)}) + \sqrt{3} (\mathcal{A} N^{(o)}, W_4) \Big\} W_4$$

(22)

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}} \Big\{ Y^{(o)} F_o^{(o)} + \frac{\partial Y^{(o)}}{\partial \alpha} (F_1^{(o)} - \alpha F_o^{(o)}) + \frac{\partial Y^{(o)}}{\partial \beta} (F_2^{(o)} - \beta F_o^{(o)}) + \frac{\partial Y^{(o)}}{\partial \gamma} (F_3^{(o)} - \gamma F_o^{(o)}) + \sqrt{3} (\mathcal{A} N^{(o)}, W_5) \Big\} W_5 .$$

On peut voir que L est une combinaison linéaire des gradients de n, α, β, γ; en fait $\vec{\nabla} n$ n'y figure pas comme on le verra plus loin . On pourrait dès maintenant expliciter L en fonction de ces gradients mais le calcul est long ; comme en fait on recherche $b_4^{(1)}$ et $b_5^{(1)}$ en fonction de ces gradients, on va d'abord calculer $b_4^{(1)}$ et $b_5^{(1)}$ en fonction de L; $b_4^{(1)}$ et $b_5^{(1)}$ sont définis en (II-(18)).

3 - Calcul de $b_4^{(1)}$ et $b_5^{(1)}$ en fonction de L

a) Calcul du premier membre de (20).

On pose $N_i^{(1)} = N_i^{(o)} x_i^{(1)}$, $i = 0, 1, \ldots, 5$. D'où

$$2 \mathcal{F}_i(N^{(o)}, N^{(1)}) = \frac{B}{3} N_i^{(o)} N_{i+3}^{(o)} \Big\{ x_{i+1}^{(1)} + x_{i+4}^{(1)} + x_{i+2}^{(1)} + x_{i+5}^{(1)} - 2x_i^{(1)} - 2x_{i+3}^{(1)} \Big\} .$$

L'équation (20) s'écrit :

$$(23) \quad \frac{B}{3} N_o^{(o)} N_3^{(o)} \mathbb{I}' x^{(1)} = \mu_4 W_4 + \mu_5 W_5$$

avec :

$$\mathbb{L}' = \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \end{Vmatrix}$$

$\mathbb{L}'$ est à un coefficient scalaire près la matrice $\mathbb{L}$ définie en (II-(1)). $\mathbb{L}'$ admet 0 comme valeur propre quadruple, l'espace propre associé étant $\mathbb{F}$; par ailleurs $\mathbb{L}'$ admet -6 comme valeur propre double, l'espace propre associé étant $\mathbb{F}^{\perp}$ comme il est facile de le vérifier.

b) Résolution de (23)

(23) se résoud ainsi :

$$(24)\quad \begin{cases} x^{(1)} = \sqrt{6}\,\lambda_0 V_0 + \sqrt{2}\,\lambda_1 V_1' + \sqrt{2}\,\lambda_2 V_2' + \sqrt{3}\,\lambda_3 V_3' + \sqrt{12}\,\beta_4 W_4 + 2\,\beta_5 W_5 \\ \text{avec} \quad \beta_4 = -\dfrac{\mu_4}{4\sqrt{3}\ B\ N_0^{(0)}\ N_3^{(0)}} \qquad \beta_5 = -\dfrac{\mu_5}{4\,B\,N_0^{(0)}\ N_3^{(0)}} \\ \lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \quad \text{arbitraires .} \end{cases}$$

On déduit de (24) et de (16) les expressions suivantes pour $N_i^{(1)}$ $i = 0, 1, \ldots, 5$:

$$N_0^{(1)} = \frac{n}{6}\,(1 + 3\alpha - 2X^{(0)})\,(\lambda_0 + \lambda_1 - 2\,\beta_4)$$

$$N_1^{(1)} = \frac{n}{6}\,(1 - 3\gamma + X^{(0)} + \sqrt{3}\,Y^{(0)})\,(\lambda_0 - \lambda_3 + \beta_4 + \beta_5)$$

$$N_2^{(1)} = \frac{n}{6}\,(1 + 3\beta + X^{(0)} - \sqrt{3}\,Y^{(0)})\,(\lambda_0 + \lambda_2 + \beta_4 - \beta_5)$$

$$N_3^{(1)} = \frac{n}{6}\,(1 - 3\alpha - 2X^{(0)})\,(\lambda_0 - \lambda_1 - 2\beta_4)$$

$$N_4^{(1)} = \frac{n}{6}\,(1 + 3\gamma + X^{(0)} + \sqrt{3}\,Y^{(0)})\,(\lambda_0 + \lambda_3 + \beta_4 + \beta_5)$$

$$N_5^{(1)} = \frac{n}{6}\,(1 - 3\beta + X^{(0)} - \sqrt{3}\,Y^{(0)})\,(\lambda_0 - \lambda_2 + \beta_4 - \beta_5)$$

Les constantes $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont déterminées par les conditions (II-(15)) qui ici s'écrivent :

$$(N^{(1)}, V_0) = (N^{(1)}, V_1') = (N^{(1)}, V_2') = (N^{(1)}, V_3') = 0$$

soit :

$$(25)\quad \begin{cases} 6\lambda_0 + 6\alpha\lambda_1 + 6\beta\lambda_2 + 6\gamma\lambda_3 + 12\,X^{(0)}\beta_4 + 4\sqrt{3}\,Y^{(0)}\beta_5 = 0 \\ (1 - 2X^{(0)})\lambda_1 + 3\alpha(\lambda_0 - 2\beta_4) = 0 \\ (1 + X^{(0)} - \sqrt{3}\,Y^{(0)})\lambda_2 + 3\beta(\lambda_0 + \beta_4 - \beta_5) = 0 \\ (1 + X^{(0)} + \sqrt{3}\,Y^{(0)})\lambda_3 + 3\gamma(\lambda_0 + \beta_4 + \beta_5) = 0\,. \end{cases}$$

En faisant la combinaison $\frac{1}{6}, -\frac{\alpha}{1-2X^{(0)}}, -\frac{\beta}{1+X^{(0)}-\sqrt{3}\,Y^{(0)}}$,

$-\frac{\gamma}{1+X^{(0)}+\sqrt{3}\,Y^{(0)}}$ on trouve λ_0 :

$$\lambda_0\left\{1 - \frac{3\alpha^2}{1-2X^{(0)}} - \frac{3\beta^2}{1+X^{(0)}-\sqrt{3}\,Y^{(0)}} - \frac{3\gamma^2}{1+X^{(0)}+\sqrt{3}\,Y^{(0)}}\right\} + \beta_4\left\{\frac{6\alpha^2}{1-2X^{(0)}} - \frac{3\beta^2}{1+X^{(0)}-\sqrt{3}\,Y^{(0)}} - \frac{3\gamma^2}{1+X^{(0)}+\sqrt{3}\,Y^{(0)}} + 2X^{(0)}\right\} + \beta_5\left\{\frac{3\beta^2}{1+X^{(0)}-\sqrt{3}\,Y^{(0)}} - \frac{3\gamma^2}{1+X^{(0)}+\sqrt{3}\,Y^{(0)}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\,Y^{(0)}\right\} = 0.$$

Utilisons la relation (17) en appelant ν^2 la valeur commune des trois membres

$$\frac{9\alpha^2}{1-2X^{(0)}} = 1 - 2X^{(0)} - \frac{\nu^2}{1-2X^{(0)}},$$

$$\frac{9\beta^2}{1+X^{(0)}-\sqrt{3}\,Y^{(0)}} = 1 + X^{(0)} - \sqrt{3}\,Y^{(0)} - \frac{\nu^2}{1+X^{(0)}-\sqrt{3}\,Y^{(0)}},$$

$$\frac{9\gamma^2}{1+X^{(0)}+\sqrt{3}\,Y^{(0)}} = 1 + X^{(0)} + \sqrt{3}\,Y^{(0)} - \frac{\nu^2}{1+X^{(0)}+\sqrt{3}\,Y^{(0)}}\,.$$

Ces expressions permettent d'éliminer $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ dans l'égalité précédente définissant λ_0; on arrive à :

$$(26)\quad \lambda_0 = \frac{1}{(X^{(0)})^2 + (Y^{(0)})^2 - 1}\left\{2\left[(Y^{(0)})^2 - (X^{(0)})^2 - X^{(0)}\right]\beta_4 - 2\,\frac{\sqrt{3}}{3}\,Y^{(0)}(1 - 2X^{(0)})\,\beta_5\right\}.$$

Afin d'alléger les notations dans les calculs suivants ainsi que dans ceux du paragraphe D-4 on n'écrira pas l'indice supérieur (o) de $X^{(0)}$ et $Y^{(0)}$.

c) Calcul de $b_4^{(1)}$

D'après (II-(18)) $b_4^{(1)} = (N^{(1)}, W_4) = \frac{1}{\sqrt{12}}(-2N_0^{(1)} + N_1^{(1)} + N_2^{(1)} - 2N_3^{(1)} + N_4^{(1)} + N_5^{(1)})$

d'où

$$b_4^{(1)} = -\frac{n\sqrt{3}}{6}(1 + 3\alpha - 2X)(\lambda_0 + \lambda_1 - 2\beta_4) .$$

Avec (25) et (17) on peut écrire :

$$b_4^{(1)} = -\frac{n\sqrt{3}}{6}\frac{\nu^2}{1-2X}(\lambda_0 - 2\beta_4) .$$

Comme λ_0 est donné par l'expresion (26) :

$$b_4^{(1)} = -n\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\nu^2}{X^2+Y^2-1}\left[(X+1)\beta_4 - Y\frac{\sqrt{3}}{3}\beta_5\right] .$$

Mais $\frac{n^2}{36}\nu^2 = N_0 N_3$ et en utilisant (24) :

(27) $$b_4^{(1)} = \frac{3}{B}\frac{1}{n}\frac{1}{X^2+Y^2-1}((X+1)\mu_4 - Y\mu_5) .$$

d) Calcul de $b_5^{(1)}$

On procède de manière analogue :

$$b_5^{(1)} = (N^{(1)}, W_5) = \frac{1}{2}(N_1^{(1)} - N_2^{(1)} + N_4^{(1)} - N_5^{(1)}) .$$

On remplace $N_i^{(1)}$, $i = 1, 2, 4, 5$ par leurs valeurs données en (24), puis on utilise (25) pour ne conserver que le paramètre λ_0

$$b_5^{(1)} = \frac{n}{6}\nu^2\left\{\frac{\lambda_0+\beta_4+\beta_5}{1+X+\sqrt{3}Y} - \frac{\lambda_0+\beta_4-\beta_5}{1+X-\sqrt{3}Y}\right\} .$$

Mais

$$\lambda_0 + \beta_4 + \beta_5 = \frac{1+X+\sqrt{3}Y}{X^2+Y^2-1}\left\{-(1+X-\sqrt{3}Y)\beta_4 + (X-1+\frac{\sqrt{3}}{3}Y)\beta_5\right\}$$

$$\lambda_0 + \beta_4 - \beta_5 = \frac{1+X-\sqrt{3}Y}{X^2+Y^2-1}\left\{(\sqrt{3}Y+X+1)\beta_4 + (X+1-\frac{\sqrt{3}}{3}Y)\beta_5\right\}$$

d'où

$$b_5^{(1)} = \frac{n}{3}\frac{\nu^2}{X^2+Y^2-1}(\sqrt{3}Y\beta_4 + (X-1)\beta_5)$$

(28) $$b_5^{(1)} = -\frac{3}{B}\frac{1}{n}\frac{1}{X^2+Y^2-1}(Y\mu_4 + (X-1)\mu_5) .$$

4 - Expressions explicites pour $b_4^{(1)}$ et $b_5^{(1)}$

Nous calculons successivement $(\mathcal{A}N^{(0)}, W_4)$ et $(\mathcal{A}N^{(0)}, W_5)$, puis au lieu de μ_4 et μ_5 nous calculons les combinaisons $Y\mu_4 + (X+1)\mu_5$ et $(X-1)\mu_4 - Y\mu_5$; ces combinaisons sont choisies car les coefficients de μ_4 et μ_5 sont proportionnels aux dérivées par rapport à X et à Y des expressions $(X+1)Y$ et $X^2 - 2X - Y^2$ figurant dans les équations (14).

a) Calcul de $(\mathcal{A}N^{(0)}, W_4)$ et $(\mathcal{A}N^{(0)}, W_5)$

$$(\ldots, \vec{u}_k\ W_{4k}, \ldots) = (-2\,\vec{u}_0 V_1' + \vec{u}_2 V_2' + \vec{u}_4 V_3')\,\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$(\ldots, \vec{u}_k\ W_{5k}, \ldots) = (-\vec{u}_2 V_2' + \vec{u}_4 V_3')\,\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(\mathcal{A}N^{(0)}, W_4) = \sum_{k=0}^{5} \vec{u}_k\ W_{4k} \cdot \vec{\nabla} N_k^{(0)} \quad \text{et} \quad (\mathcal{A}N^{(0)}, W_5) = \sum_{k=0}^{5} \vec{u}_k\ W_{5k} \cdot \vec{\nabla} N_k^{(0)}$$

Donc :

$$(\mathcal{A}N^{(0)}, W_4) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(-2\,\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}(n\alpha) + \vec{u}_2 \cdot \vec{\nabla}(n\beta) + \vec{u}_4 \cdot \vec{\nabla}(n\gamma) \right)$$

$$(\mathcal{A}N^{(0)}, W_5) = \frac{1}{2}(-\vec{u}_2 \cdot \vec{\nabla}(n\beta) + \vec{u}_4 \cdot \vec{\nabla}(n\gamma)) \cdot$$

En conséquence d'après (21) (22) et (19) on peut écrire :

$$\begin{aligned}(29)\quad \mu_4 = &-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(X - \alpha\frac{\partial X}{\partial \alpha} - \beta\frac{\partial X}{\partial \beta} - \gamma\frac{\partial X}{\partial \gamma}\right)\vec{\nabla}\cdot(n\alpha\,\vec{u}_0 + n\beta\,\vec{u}_2 + n\gamma\,\vec{u}_4) \\ &- \frac{1}{3\sqrt{3}}\frac{\partial X}{\partial \alpha}\,\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}[n(1-2X)] - \frac{1}{3\sqrt{3}}\frac{\partial X}{\partial \beta}\,\vec{u}_2 \cdot \vec{\nabla}[n(1+X-\sqrt{3}\,Y)] \\ &- \frac{1}{3\sqrt{3}}\frac{\partial X}{\partial \gamma}\,\vec{u}_4 \cdot \vec{\nabla}[n(1+X+\sqrt{3}\,Y)] + \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\vec{\nabla}\cdot(-2n\alpha\,\vec{u}_0 + n\beta\,\vec{u}_2 + n\gamma\,\vec{u}_4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(30)\quad \mu_5 = &-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(Y - \alpha\frac{\partial Y}{\partial \alpha} - \beta\frac{\partial Y}{\partial \beta} - \gamma\frac{\partial Y}{\partial \gamma}\right)\vec{\nabla}\cdot(n\alpha\,\vec{u}_0 + n\beta\,\vec{u}_2 + n\gamma\,\vec{u}_4) \\ &- \frac{1}{3\sqrt{3}}\frac{\partial Y}{\partial \alpha}\,\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}[n(1-2X)] - \frac{1}{3\sqrt{3}}\frac{\partial Y}{\partial \beta}\,\vec{u}_2 \cdot \vec{\nabla}[n(1+X-\sqrt{3}\,Y)] \\ &- \frac{1}{3\sqrt{3}}\frac{\partial Y}{\partial \gamma}\,\vec{u}_4 \cdot \vec{\nabla}[n(1+X+\sqrt{3}\,Y)] + \frac{1}{2}\,\vec{\nabla}\cdot(-n\beta\,\vec{u}_2 + n\gamma\,\vec{u}_4) \cdot\end{aligned}$$

b) Calcul de $Y\mu_4 + (X+1)\mu_5$

On fait la combinaison indiquée sur les expressions (29 et (30); or d'après (14) $(X+1)Y = -\frac{3\sqrt{3}}{4}(\beta^2 - \gamma^2)$, et comme X et Y sont des fonctions de α, β, γ, on a :

$$Y\frac{\partial X}{\partial \alpha} + (X+1)\frac{\partial Y}{\partial \alpha} = 0\ , \quad Y\frac{\partial X}{\partial \beta} + (X+1)\frac{\partial Y}{\partial \beta} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}\beta\ , \quad Y\frac{\partial X}{\partial \gamma} + (X+1)\frac{\partial Y}{\partial \gamma} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\gamma$$

$$(31)\quad Y\mu_4 + (X+1)\mu_5 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{ XY + (X+1)Y + \frac{3\sqrt{3}}{2}\beta^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\gamma^2 \right\} \vec{\nabla}.(n\alpha\,\vec{u_0} + n\beta\,\vec{u_2} + n\gamma\,\vec{u_4})$$
$$+ \frac{\beta}{2}\,\vec{u_2}\,.\,\vec{\nabla}[n(1+X-\sqrt{3}\,Y)] - \frac{Y}{2}\,\vec{u_4}\,.\,\vec{\nabla}[n(1+X+\sqrt{3}\,Y)]$$
$$+ \frac{Y}{2\sqrt{3}}\,\vec{\nabla}.(-2n\alpha\,\vec{u_0} + n\beta\,\vec{u_2} + n\gamma\,\vec{u_4}) + \frac{X+1}{2}\,\vec{\nabla}.(-n\beta\,\vec{u_2} + n\gamma\,\vec{u_4}).$$

Or $\vec{u_0} = c\,\vec{e_0}$, $\vec{u_2} = -\frac{c}{2}\,\vec{e_0} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,c\,\vec{e_1}$, $\vec{u_4} = -\frac{c}{2}\,\vec{e_0} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,c\,\vec{e_1}$. On constate que le coefficient de $\vec{\nabla}n$ dans $Y\mu_4 + (X+1)\mu_5$ est nul; pour le voir on écrit, en décomposant $\vec{u_0}$, $\vec{u_2}$, $\vec{u_4}$ comme indiqué, $Y\mu_4 + (X+1)\mu_5$ sous forme $\vec{e_0}\,.\,\vec{\nabla}(...) + \vec{e_1}\,.\,\vec{\nabla}(...)$: les coefficients de $\vec{\nabla}n$ dans chacun des deux termes sont nuls. On peut donc dans l'expression (31) sortir n des gradients.

c) Calcul de $(X-1)\mu_4 - Y\mu_5$.

D'après (14) on a $X^2 - 2X - Y^2 = \frac{3}{2}(2\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2)$

$$(X-1)\frac{\partial X}{\partial\alpha} - Y\frac{\partial Y}{\partial\alpha} = 3\alpha \quad , \quad (X-1)\frac{\partial X}{\partial\beta} - Y\frac{\partial Y}{\partial\beta} = -\frac{3}{2}\beta \quad , \quad (X-1)\frac{\partial X}{\partial\gamma} - Y\frac{\partial Y}{\partial\gamma} = -\frac{3}{2}\gamma$$

$$(32)\quad (X-1)\mu_4 - Y\mu_5 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{ X(X-1) - Y^2 - 3\alpha^2 + \frac{3}{2}\beta^2 + \frac{3}{2}\gamma^2 \right\} \vec{\nabla}.(n\alpha\vec{u_0} + n\beta\vec{u_2} + n\gamma\vec{u_4})$$
$$- \frac{\alpha}{\sqrt{3}}\,\vec{u_0}\,.\vec{\nabla}[n(1-2X)] + \frac{\beta}{2\sqrt{3}}\,\vec{u_2}.\,\vec{\nabla}[n(1+X-\sqrt{3}\,Y)] + \frac{\gamma}{2\sqrt{3}}\,\vec{u_4}.\,\vec{\nabla}[n(1+X+\sqrt{3}\,Y)]$$
$$+ \frac{X-1}{2\sqrt{3}}\vec{\nabla}.(-2n\alpha\,\vec{u_0} + n\beta\,\vec{u_2} + n\gamma\,\vec{u_4}) - \frac{Y}{2}\,\vec{\nabla}.(-n\beta\,\vec{u_2} + n\gamma\,\vec{u_4}).$$

En procédant comme précédemment on peut voir que le coefficient de $\vec{\nabla}n$ est nul ; on peut dans l'expression (32) sortir n des gradients.

d) Calcul de $b_4^{(1)}$

$b_4^{(1)}$ est donné en (27) et peut se mettre sous la forme :

$$b_4^{(1)} = \frac{3}{B}\,\frac{1}{n}\,\frac{1}{(X^2+Y^2-1)^2}\left\{ 2Y[\,Y\mu_4 + (X+1)\mu_5] + [(X+1)^2 + Y^2][(X-1)\mu_4 - Y\mu_5] \right\}.$$

En utilisant (31) et (32) expressions dans lesquelles on sort n , il vient :

$$b_4^{(1)} = \frac{\sqrt{3}}{2B}\frac{1}{(X^2+Y^2-1)^2}\Big\{2\big[(X+1)^2+Y^2\big]\big[(1-2X)\vec{\nabla}\alpha - \alpha\vec{\nabla}(1-2X)\big].\vec{u_0}$$

$$+\big[(X+1)^2+Y^2+2\sqrt{3}Y\big]\big[\beta\vec{\nabla}(1+X-\sqrt{3}Y) - (1+X-\sqrt{3}Y)\vec{\nabla}\beta\big].\vec{u_2}$$

$$+\big[(X+1)^2+Y^2-2\sqrt{3}Y\big]\big[\gamma\vec{\nabla}(1+X+\sqrt{3}Y) - (1+X+\sqrt{3}Y)\vec{\nabla}\gamma\big].\vec{u_4}\Big\}$$

après avoir regroupé les facteurs de $\vec{u_0}$, $\vec{u_2}$, $\vec{u_4}$ et tenu compte de (14). On peut aussi écrire :

$$(33)\quad b_4^{(1)} = \frac{\sqrt{3}}{2B}\frac{1}{(X^2+Y^2-1)^2}\Big\{-2\alpha^2\big[(X+1)^2+Y^2\big]\vec{\nabla}\left(\frac{1-2X}{\alpha}\right).\vec{u_0}$$

$$+\beta^2\big[(X+1)^2+Y^2+2\sqrt{3}Y\big]\vec{\nabla}\left(\frac{1+X-\sqrt{3}Y}{\beta}\right).\vec{u_2}$$

$$+\gamma^2\big[(X+1)^2+Y^2-2\sqrt{3}Y\big]\vec{\nabla}\left(\frac{1+X+\sqrt{3}Y}{\gamma}\right).\vec{u_4}\Big\}\ .$$

e) Calcul de $b_5^{(1)}$

$b_5^{(1)}$ est donné en (28) et se met sous la forme :

$$b_5^{(1)} = -\frac{3}{B}\frac{1}{n}\frac{1}{(X^2+Y^2-1)^2}\Big\{\big[(X-1)^2+Y^2\big]\big[Y\mu_4+(X+1)\mu_5\big]$$

$$+2Y\big[(X-1)\mu_4 - Y\mu_5\big]\Big\}\ .$$

On utilise (31) et (32) et on arrive à :

$$(34)\quad b_5^{(1)} = \frac{\sqrt{3}}{2B}\frac{1}{(X^2+Y^2-1)^2}\Big\{4\alpha^2 Y\vec{\nabla}\left(\frac{1-2X}{\alpha}\right).\vec{u_0} +$$

$$+\beta^2\big[\sqrt{3}(X-1)^2+\sqrt{3}Y^2+2Y\big]\vec{\nabla}\left(\frac{1+X-\sqrt{3}Y}{\beta}\right).\vec{u_2}$$

$$+\gamma^2\big[-\sqrt{3}(X-1)^2-\sqrt{3}Y^2+2Y\big]\vec{\nabla}\left(\frac{1+X+\sqrt{3}Y}{\gamma}\right).\vec{u_4}\Big\}\ .$$

5 - Récapitulation des résultats et obtension de la seconde approximation $N^{(1)}$.

L'expression de $N^{(1)}$, donnée dans le cas général par (II-(18)) est ici :

$$N^{(1)} = b_4^{(1)} W_4 + b_5^{(1)} W_5$$

avec $b_4^{(1)}$ et $b_5^{(1)}$ donnés respectivement par les formules (33) et (34). Dans ces formules X et Y sont mis pour $X^{(0)}$ et $Y^{(0)}$ fonctions implicites de α, β, γ définies par (17) soit :

$$(1 - 2X^{(0)})^2 - 9\alpha^2 = (1 + X^{(0)} - \sqrt{3}\, Y^{(0)})^2 - 9\beta^2 = (1 + X^{(0)} + \sqrt{3}\, Y^{(0)})^2 - 9\gamma^2 .$$

Les équations de conservation (8) à l'ordre 1 s'apparentent aux équations de Navier-Stokes (II-(19)) et s'écrivent :

$$(35) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} n + \vec{\nabla} . (n\alpha \vec{u_0} + n\beta \vec{u_2} + n\gamma \vec{u_4}) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t} (n\alpha) + \vec{u_0} . \vec{\nabla} \left[\dfrac{n}{3} (1 - 2X^{(0)}) - \dfrac{2}{\sqrt{3}} b_4^{(1)} \right] = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t} (n\beta) + \vec{u_2} . \vec{\nabla} \left[\dfrac{n}{3} (1 + X^{(0)} - \sqrt{3}\, Y^{(0)}) + \dfrac{1}{\sqrt{3}} b_4^{(1)} - b_5^{(1)} \right] = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t} (n\gamma) + \vec{u_4} . \vec{\nabla} \left[\dfrac{n}{3} (1 + X^{(0)} + \sqrt{3}\, Y^{(0)}) + \dfrac{1}{\sqrt{3}} b_4^{(1)} + b_5^{(1)} \right] = 0. \end{cases}$$

Les équations obtenues (35) ne sont pas simples, les expressions de $b_4^{(1)}$ $b_5^{(1)}$ en fonction de α, β, γ étant compliquées. De plus les relations (17) définissant $X^{(0)}$, $Y^{(0)}$ ne se résolvent pas explicitement. Les directions privilégiées du modèle c'est à dire les directions de $\vec{u_0}$, $\vec{u_2}$, $\vec{u_4}$, figurent évidemment dans les équations (35) lesquelles sont invariantes dans toute transformation conservant globalement le modèle.

Naturellement le système de Navier-Stokes (35) est du second ordre les dérivées spatiales d'ordre 2 des quantités α, β, γ y figurant. On remarque que n ne figure pas dans $b_4^{(1)}$ et $b_5^{(1)}$ aussi n'y a t-il pas de dérivées spatiales d'ordre 2 de n dans (35). Il en est de même pour les équations de Navier-Stokes de la dynamique des gaz classique. Mais dans le cas d'un modèle général de gaz à répartition discrète de vitesses la question de savoir si la première approximation de Chapman-Enskog $N^{(1)}$ qui s'exprime en fonction des variables d'état macroscopique et de leurs dérivées spatiales est indépendante de n, n'est pas résolue.

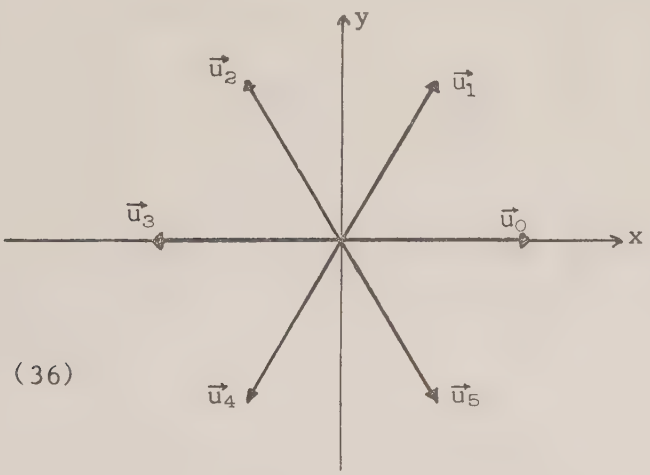
Nous avons conserver les variables avec dimensions dans ce calcul; si nous avions pris le système adimensionnalisé (II-(10)) le nombre de Knudsen ϵ serait facteur de $b_4^{(1)}$ et $b_5^{(1)}$.

2ème partie - PROPAGATION DES ONDES DE CHOC

E - POSITION DU PROBLEME. LES DIVERS SYSTEMES D'EQUATIONS ENVISAGES

1 - Position du problème

On envisage le modèle décrit dans le paragraphe A mais on fait $\theta = 0$.



(36)

On étudie pour le gaz, les mouvements unidimensionnels dans la direction des x, tels que toutes les quantités ne dépendent de x et t que par le groupement $\eta = x - \xi t$. En examinant les équations exactes (1) on voit qu'il est nécessaire d'avoir :

$$N_1 = N_5 \quad , \quad N_2 = N_4$$

et par suite $b_5 = 0$ (ou $Y = 0$).

Microscopiquement le gaz est décrit par quatre quantités à savoir N_0, N_1, N_2, N_3 ou bien n, u, δ, b_4 (ou X), ou bien encore n, α, $\beta = \gamma$, b_4. Macroscopiquement le gaz est décrit à l'aide de trois quantités seulement, par exemple n, u, δ. On a une seule variable microscopique, b_4, et c'est à cause de cela que l'on va pouvoir déterminer effectivement la structure d'une onde de choc soit à partir des équations cinétiques exactes, soit à partir des équations de Navier-Stokes.

Dans la suite, (paragraphes E à K) on fera $c = 1$ ce qui revient à non dimensionnaliser toutes les vitesses à l'aide de c .

2 - Les équations cinétiques exactes

Les équations cinétiques exactes pour le problème à étudier sont les équations (1) dans lesquelles on utilise les relations (36) :

$$(37)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial N_0}{\partial t} + \dfrac{\partial N_0}{\partial x} = 2\dfrac{B}{3}(N_1 N_2 - N_0 N_3) \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial N_1}{\partial x} = \dfrac{B}{3}(N_0 N_3 - N_1 N_2) \\ \dfrac{\partial N_2}{\partial t} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial N_2}{\partial x} = \dfrac{B}{3}(N_0 N_3 - N_1 N_2) \\ \dfrac{\partial N_3}{\partial t} - \dfrac{\partial N_3}{\partial x} = 2\dfrac{B}{3}(N_1 N_2 - N_0 N_3) \end{cases}$$

Les variables macroscopiques que nous prendrons sont n, u, δ. On a :

$$(38)\quad \begin{cases} N_0 = \dfrac{n}{6}(1 + 2u + \delta - 2X) \\ N_1 = \dfrac{n}{6}(1 + u - \delta + X) \\ N_2 = \dfrac{n}{6}(1 - u + \delta + X) \\ N_3 = \dfrac{n}{6}(1 - 2u - \delta - 2X) \end{cases} \qquad \begin{cases} n = N_0 + N_3 + 2N_1 + 2N_2 \\ nu = N_0 - N_3 + N_1 - N_2 \\ n\delta = N_0 - N_3 - 2N_1 + 2N_2 \\ nX = -N_0 - N_3 + N_1 + N_2 \end{cases}$$

3 - Les équations d'Euler

On précise d'abord l'état maxwellien : étant données les trois grandeurs n, u, δ macroscopiques il leur correspond un état maxwellien et un seul caractérisé par, d'après (14) et (6),

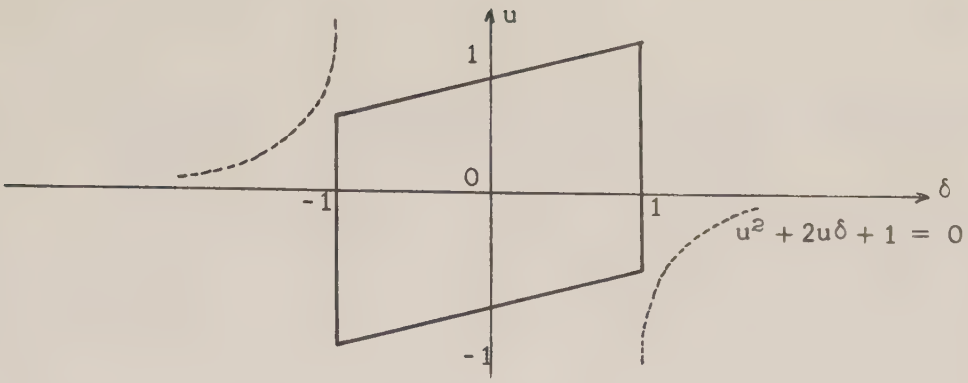
$$X^2 - 2X = u^2 + 2u\delta$$

soit car $|X|$ est inférieur à 1 :

$$(39)\qquad X = 1 - (u^2 + 2u\delta + 1)^{\frac{1}{2}} \quad .$$

Remarque. Pour que les grandeurs n, u, δ soient effectivement les variables d'état macroscopique d'un gaz il faut et il suffit qu'elles vérifient les inégalités ci-dessous d'après la conclusion du paragraphe C-1 :

$$\begin{cases} n > 0 \\ 0 < |\delta + 2u| + 2|\delta - u| < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n > 0 \\ -1 < \delta < 1 \\ -3 < \delta - 4u < 3 \end{cases}$$



Les équations d'Euler se déduisent des équations (9) où l'on fait $b_4 = b_4^{(0)}$, $b_5 = 0$

$$(40)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} n + \dfrac{\partial}{\partial x}(n u) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(n u) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x} n - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x}(n X) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(n \delta) - \dfrac{\partial}{\partial x}(n X) = 0 \\ \text{avec} \quad X = 1 - (u^2 + 2u\delta + 1)^{\frac{1}{2}} \end{cases} .$$

4 - Les équations de Navier-Stokes

Les expressions de $b_4^{(1)}$ et $b_5^{(1)}$ pour les écoulements envisagés se déduisent des expressions générales (33) et (34) : $b_5^{(1)} = 0$

$$b_4^{(1)} = \frac{\sqrt{3}}{2B}\frac{1}{(X^2 - 1)^2}\left\{ -\frac{2}{9}(\delta + 2u)^2 (X + 1)^2 \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{3(1 - 2X)}{\delta + 2u}\right] \right.$$

$$\left. -\frac{1}{9}(\delta - u)^2 (X + 1)^2 \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{3(1 + X)}{\delta - u}\right]\right\}$$

car d'après (6) $\alpha = \frac{1}{3}(\delta + 2u)$ et $\beta = \gamma = \frac{1}{3}(\delta - u)$. Finallement

$$(41)\quad b_4^{(1)} = -\frac{\sqrt{3}}{2B}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta + 3u}{X - 1}\right) + \frac{2}{(X - 1)^2}\frac{\partial}{\partial x} u\right\} .$$

Les équations de Navier Stokes se déduisent de (9) où l'on fait
$b_4 = b_4^{(0)} + b_4^{(1)}$, $b_5 = 0$

$$(42)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} n + \frac{\partial}{\partial x}(n u) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(n u) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} n - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(n X) + \frac{3}{4B}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta + 3u}{X - 1}\right) + \frac{2}{(X-1)^2}\frac{\partial}{\partial x} u\right\} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(n \delta) - \frac{\partial}{\partial x}(n X) + \frac{3}{2B}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta + 3u}{X - 1}\right) + \frac{2}{(X-1)^2}\frac{\partial}{\partial x} u\right\} = 0 \\ \text{avec} \qquad X = 1 - (u^2 + 2u\delta + 1)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

F - LES RELATIONS DE CHOC

1 - Calcul des densités dans l'état 2 en fonction des densités dans l'état 1 et de la vitesse de déplacement de l'onde de choc.

On considère le milieu sans dissipation, c'est à dire le milieu régi par les équations d'Euler (40); on appelle ξ la vitesse de déplacement de l'onde de choc. Les deux états 1 et 2 sont caractérisés par $n^{(1)}$, $u^{(1)}$, $\delta^{(1)}$ et $n^{(2)}$, $u^{(2)}$, $\delta^{(2)}$ vérifiant les relations de choc déduites de (40) de manière classique :

$$(43)\quad \begin{cases} (u^{(1)} - \xi) n^{(1)} = (u^{(2)} - \xi) n^{(2)} \\ \left[\frac{1}{2}(1 - X^{(1)}) - \xi u^{(1)}\right] n^{(1)} = \left[\frac{1}{2}(1 - X^{(2)}) - \xi u^{(2)}\right] n^{(2)} \\ (X^{(1)} + \xi \delta^{(1)}) n^{(1)} = (X^{(2)} + \xi \delta^{(2)}) n^{(2)} \\ \text{avec} \qquad X = 1 - (u^2 + 2u\delta + 1)^{\frac{1}{2}} . \end{cases}$$

Ces équations permettent de déterminer $n^{(2)}$, $u^{(2)}$, $\delta^{(2)}$ en fonction de ξ, $n^{(1)}$, $u^{(1)}$, $\delta^{(1)}$; on doit ensuite étudier les inégalités affirmant que l'on a effectivement les variables d'état macroscopique d'un gaz (paragraphe E-3). Cette discussion est plus aisée à faire avec les densités N_0, N_1, N_2, N_3; celles-ci sont solutions des trois intégrales premières de (37) :

$$(44)\quad \frac{\partial N_0}{\partial t} + \frac{\partial N_0}{\partial x} = -2\left(\frac{\partial N_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial N_1}{\partial x}\right) = -2\left(\frac{\partial N_2}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial N_2}{\partial x}\right) = \frac{\partial N_3}{\partial t} - \frac{\partial N_3}{\partial x}\,.$$

Les relations de choc s'écrivent alors :

$$(45)\begin{cases} (1-\xi)(N_0^{(2)} - N_0^{(1)}) = -(1-2\xi)(N_1^{(2)} - N_1^{(1)}) = (1+2\xi)(N_2^{(2)} - N_2^{(1)}) = -(1+\xi)(N_3^{(2)} - N_3^{(1)}) \\ N_0^{(1)}\, N_3^{(1)} = N_1^{(1)}\, N_2^{(1)} \qquad N_0^{(2)}\, N_3^{(2)} = N_1^{(2)}\, N_2^{(2)} \end{cases}$$

Des premières égalités on tire $N_1^{(2)}$, $N_2^{(2)}$, $N_3^{(2)}$ en fonction de $N_0^{(2)}$ et on porte ces expressions dans la relation exprimant que l'état 2 est maxwellien :

$$N_0^{(2)}\, N_3^{(2)} - N_1^{(2)}\, N_2^{(2)} = N_0^{(2)}\left[N_3^{(1)} - \frac{1-\xi}{1+\xi}(N_0^{(2)} - N_0^{(1)})\right] - \left[N_1^{(1)} - \frac{1-\xi}{1-2\xi}(N_0^{(2)} - N_0^{(1)})\right]\cdot$$

$$\left[N_2^{(1)} + \frac{1-\xi}{1+2\xi}(N_0^{(2)} - N_0^{(1)})\right] = 0\,.$$

La solution intéressante est celle, $N_0^{(2)}$, non identique à $N_0^{(1)}$. Ci-dessous on écrit l'expression obtenue pour $N_0^{(2)}$ ainsi que celles de $N_3^{(2)}$, $N_1^{(2)}$, $N_2^{(2)}$ en fonction de ξ et des densités dans l'état 1

$$(46)\begin{cases} N_0^{(2)} = \frac{1-\xi^2}{3\xi^2}\, N_0^{(1)} - \frac{(1+\xi)(1-4\xi^2)}{3\xi^2(1-\xi)}\, N_3^{(1)} + \frac{(1+\xi)(1-2\xi)}{3\xi^2} N_1^{(1)} - \frac{(1+\xi)(1+2\xi)}{3\xi^2}\, N_2^{(1)} \\ N_3^{(2)} = -\frac{(1-\xi)(1-4\xi^2)}{3\xi^2(1+\xi)} N_0^{(1)} + \frac{1-\xi^2}{3\xi^2}\, N_3^{(1)} - \frac{(1-\xi)(1-2\xi)}{3\xi^2} N_1^{(1)} + \frac{(1-\xi)(1+2\xi)}{3\xi^2}\, N_2^{(1)} \\ N_1^{(2)} = -\frac{(1-\xi)(1\ \ 2\xi)}{3\xi^2}\, N_0^{(1)} + \frac{(1+\xi)(1+2\xi)}{3\xi^2} N_3^{(1)} - \frac{1-4\xi^2}{3\xi^2}\, N_1^{(1)} + \frac{(1-\xi^2)(1+2\xi)}{3\xi^2(1-2\xi)} N_2^{(1)} \\ N_2^{(2)} = \frac{(1-\xi)(1-2\xi)}{3\xi^2} N_0^{(1)} - \frac{(1+\xi)(1-2\xi)}{3\xi^2} N_3^{(1)} + \frac{(1-\xi^2)(1-2\xi)}{3\xi^2(1+2\xi)} N_1^{(1)} - \frac{(1-4\xi^2)}{3\xi^2} N_2^{(1)}. \end{cases}$$

Ces formules (46) s'écrivent matriciellement :

$$(47)\qquad \begin{pmatrix} N_0^{(2)} \\ N_3^{(2)} \\ N_1^{(2)} \\ N_2^{(2)} \end{pmatrix} = \dot{M}(\xi) \begin{pmatrix} N_0^{(1)} \\ N_3^{(1)} \\ N_1^{(1)} \\ N_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

en appelant $M(\xi)$ la matrice des coefficients figurant dans (46). La matrice inverse $M^{-1}(\xi)$ donne les $N_i^{(1)}$ en fonction des $N_i^{(2)}$ et d'après (45) il est évident que :

$$M(\xi) = M^{-1}(\xi)$$

On peut se convaincre aisément que $\lambda = 1$ est valeur propre triple de $M(\xi)$ et que $\lambda = -1$ est aussi valeur propre. L'espace associé à la valeur propre $\lambda = 1$ est de dimension 3 et correspond à l'hyperplan de $\mathbf{R}^4$ d'équation :

$$(48)\quad H^{(1)}(\xi) = (1-\xi)(1-4\xi^2)N_0^{(1)} - (1+\xi)(1-4\xi^2)N_3^{(1)} + (1-\xi^2)(1-2\xi)N_1^{(1)} - (1-\xi^2)(1+2\xi)N_2^{(1)} .$$

On a $\det M(\xi) = -1$.

Les relations (46) sont linéaires et pour le jacobien on a

$$\frac{D(N_0^{(2)}, N_3^{(2)}, N_1^{(2)}, N_2^{(2)})}{D(N_0^{(1)}, N_3^{(1)}, N_1^{(1)}, N_2^{(1)})} = \det M(\xi) = -1$$

ceci est à rapprocher de la propriété locale analogue établie en (III-(37)).

On remarque que les expressions (46) peuvent également se mettre sous la forme suivante, car $N_0^{(1)} N_3^{(1)} = N_1^{(1)} N_2^{(1)}$:

$$(49)\quad \begin{cases} N_0^{(2)} = \dfrac{1+\xi}{3\xi^2(1-\xi)} (N_0^{(1)} + 4N_3^{(1)} + 2N_1^{(1)} + 2N_2^{(1)}) (\xi - \omega_1^{(1)}) (\xi - \omega_2^{(1)}) \\ N_3^{(2)} = \dfrac{1-\xi}{3\xi^2(1+\xi)} (4N_0^{(1)} + N_3^{(1)} + 2N_1^{(1)} + 2N_2^{(1)}) (\xi - \omega_3^{(1)}) (\xi - \omega_4^{(1)}) \\ N_1^{(2)} = \dfrac{1+2\xi}{3\xi^2(1-2\xi)} (-1)(2N_0^{(1)} + 2N_3^{(1)} + 4N_1^{(1)} + N_2^{(1)}) (\xi - \omega_1^{(1)}) (\xi - \omega_3^{(1)}) \\ N_2^{(2)} = \dfrac{1-2\xi}{3\xi^2(1+2\xi)} (-1)(2N_0^{(1)} + 2N_3^{(1)} + N_1^{(1)} + 4N_2^{(1)}) (\xi - \omega_2^{(1)}) (\xi - \omega_4^{(1)}) . \end{cases}$$

Les quantités ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 sont définies dans un état maxwellien et ont pour expressions en fonction des densités N_i, $i = 0, 1, 2, 3$:

$$(50)\quad \begin{cases} \omega_1 = \dfrac{N_0 + 2N_3 + N_1 + 2N_2}{N_0 + 4N_3 + 2N_1 + 2N_2} = \dfrac{2N_0 + N_3 + 2N_1 + N_2}{2N_0 + 2N_3 + 4N_1 + N_2} \\ \omega_2 = \dfrac{N_0 - 2N_3 + 2N_1 - N_2}{N_0 + 4N_3 + 2N_1 + 2N_2} = \dfrac{2N_0 - N_3 + N_1 - 2N_2}{2N_0 + 2N_3 + N_1 + 4N_2} \\ \omega_3 = \dfrac{2N_0 - N_3 + N_1 - 2N_2}{4N_0 + N_3 + 2N_1 + 2N_2} = \dfrac{N_0 - 2N_3 + 2N_1 - N_2}{2N_0 + 2N_3 + 4N_1 + N_2} \\ \omega_4 = \dfrac{-(2N_0 + N_3 + 2N_1 + N_2)}{4N_0 + N_3 + 2N_1 + 2N_2} = \dfrac{-(N_0 + 2N_3 + N_1 + 2N_2)}{2N_0 + 2N_3 + N_1 + 4N_2} \end{cases}$$

2 - Détermination de tous les états 2 qu'il est possible de relier à l'état 1 par les relations de choc.

Etant donnés l'état 1 tel que $N_i^{(1)} > 0$ pour $i = 0, 1, 2, 3,$ et ξ les formules (49) donnent des expressions pour les densités dans l'état 2, lesquelles doivent être positives pour que le problème ait un sens physique. Il est donc nécessaire d'étudier les quantités $\omega_i^{(1)}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Remarques sur les ω_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Dans un état maxwellien on peut poser :

(51) $N_0 = \nu_0 \lambda$, $N_3 = \frac{\nu_0}{\lambda}$, $N_1 = \nu_0 \mu$, $N_2 = \frac{\nu_0}{\mu}$ avec $N_0 N_3 = N_1 N_2 = \nu_0^2$

si bien que :

$$\omega_1 = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} , \quad \omega_2 = \frac{\lambda\mu - 1}{\lambda\mu + 2} , \quad \omega_3 = \frac{\lambda\mu - 1}{2\lambda\mu + 1} , \quad \omega_4 = -\frac{\lambda + \mu}{2\lambda + \mu} .$$

Il est évident que :

$$\begin{cases} -1 < \omega_4 < -\frac{1}{2} < \omega_2 < 1 \\ -1 < \omega_3 < \frac{1}{2} < \omega_1 < 1 \\ \omega_3 \leqslant \omega_2 \end{cases}$$

Par ailleurs $2\omega_2 - 1 = \frac{\lambda\mu - 4}{\lambda\mu + 2}$, $2\omega_3 + 1 = \frac{4\lambda\mu - 1}{2\lambda\mu + 1}$,

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{\lambda\mu^2 - 4\mu - 3\lambda}{(\lambda + 2\mu)(\lambda\mu + 2)} , \quad \omega_3 - \omega_4 = \frac{\lambda(3\mu^2 + 4\lambda\mu - 1)}{(2\lambda + \mu)(2\lambda\mu + 1)}$$

On trace les courbes $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$, $\mathcal{C}'''$ dont les équations sont respectivement ces quatre numérateurs égalés à zéro ; elles déterminent 5 régions dans le quart de plan $\lambda > 0$, $\mu > 0$. La figure est donnée à la fin du paragraphe. Dans les régions I, II, III, IV et V on a respectivement :

$$\begin{cases} -1 < \omega_4 < -\frac{1}{2} < \omega_3 < \frac{1}{2} < \omega_1 < \omega_2 < 1 \\ -1 < \omega_4 < -\frac{1}{2} < \omega_3 < \frac{1}{2} < \omega_2 < \omega_1 < 1 \\ -1 < \omega_4 < -\frac{1}{2} < \omega_3 < \omega_2 < \frac{1}{2} < \omega_1 < 1 \\ -1 < \omega_4 < \omega_3 < -\frac{1}{2} < \omega_2 < \frac{1}{2} < \omega_1 < 1 \\ -1 < \omega_3 < \omega_4 < -\frac{1}{2} < \omega_2 < \frac{1}{2} < \omega_1 < 1 \end{cases}$$

Dans chaque région les densités $N_i^{(2)}$ sont toutes positives sur les premier, quatrième et dernier intervalles définis par ces inégalités et associés à l'état 1.

Conclusion.

Etant donné un état 1 maxwellien et une vitesse ξ prise dans l'un des intervalles de $\mathcal{E}^{(1)}$, il existe un état 2 maxwellien et un seul tel que l'état 1 et l'état 2 soient séparés par une onde de choc se déplaçant à la vitesse constante ξ, avec :

$$\mathcal{E}^{(1)} =]-1, \inf(\omega_3^{(1)}, \omega_4^{(1)})[\cup]\sup(-\frac{1}{2}, \omega_3^{(1)}), \inf(\frac{1}{2}, \omega_2^{(1)})[\cup]\sup(\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}), 1[.$$

Les ondes de choc infiniment faibles.

Les vitesses de déplacement des ondes de choc infiniment faibles dans le milieu 1 sont les vitesses ξ pour lesquelles les densités $N_i^{(2)}$ données par (47) sont égales aux densités $N_i^{(1)}$, ou bien les vitesses ξ annulant la valeur, pour $N_0^{(2)} = N_0^{(1)}$, de la dérivée par rapport à $N_0^{(2)}$ de l'expression $N_0^{(2)} N_3^{(2)} - N_1^{(2)} N_2^{(2)}$ exprimée en fonction des $N_i^{(1)}$, $i = 0, 1, 2, 3$ et de $N_0^{(2)}$ au moyen des intégrales premières (45) : cette dernière formulation est celle donnée dans (III- § A-2). Ce sont aussi les vitesses caractéristiques de l'opérateur homogène d'ordre le plus bas figurant dans l'équation aux dérivées partielles vérifiée par chaque petite perturbation h après linéarisation des équations cinétiques exactes (37). Cette dernière équation s'écrit :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)h + \frac{B}{3}\left\{N_1^{(1)}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right) + \right.$$

$$+ N_2^{(1)}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right) + 2N_0^{(1)}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) +$$

$$\left. + 2N_3^{(1)}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\right\} h = 0.$$

D'après la théorie générale les vitesses caractéristiques de chaque groupement sont réelles et la propriété d'emboitement des groupements homogènes d'ordre successif a lieu (III- § B-4). Ceci peut être vérifié dans ce cas particulier.

En effet les vitesses de déplacement des ondes de choc infiniment faibles dans le milieu 1 sont les racines (voir (48)) de :

$$H^{(1)}(\xi) = (1-\xi)(1-4\xi^2)N_0^{(1)} - (1+\xi)(1-4\xi^2)N_3^{(1)} + (1-\xi^2)(1-2\xi)N_1^{(1)}$$

$$-(1-\xi^2)(1+2\xi)N_2^{(1)} .$$

On appelle $H(\xi)$ ce même polynôme avec $N_i^{(1)}$ remplacé par N_i densité dans un état maxwellien. On vérifie facilement que : $H(1) = 6N_3 > 0$,

$$H(-1) = -6N_0 < 0 \ , \quad H(\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{3}{2} N_2 < 0 \ , \quad H(-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{3}{2} N_1 > 0 \ ,$$

$$H(\omega_1) = \nu_0 \frac{(\lambda+\mu)^2}{(\lambda+2\mu)^3} (-3\lambda\mu) < 0 \ , \quad H(\omega_2) = \nu_0 \frac{(\lambda\mu - 1)^2}{(\lambda\mu + 2)^3} (-9\lambda) < 0 \ ,$$

$$H(\omega_3) = \nu_0 \frac{(1-\lambda\mu)^2}{(1+2\lambda\mu)^3} 9\mu > 0 \ , \quad H(\omega_4) = 3\nu_0 \frac{(\lambda+\mu)^2}{(2\lambda+\mu)^3} > 0 \ .$$

En conséquence $H(\xi) = 0$ a 3 racines réelles ξ_3, ξ_2, ξ_1 avec une racine dans chacun des 3 intervalles constituant $\mathcal{E}$:

(52)

ξ	-1	ξ_3	$\inf(\omega_3,\omega_4)$	$\sup(-\frac{1}{2},\omega_3)$	ξ_2	$\inf(\frac{1}{2},\omega_2)$	$\sup(\omega_1,\omega_2)$	ξ_1	1
$H(\xi)$		$-$ 0 $+$		$+$ 0 $-$			$-$ 0 $+$		

Remarques sur la vitesse u

Enfin on fait quelques remarques sur la vitesse macroscopique u d'un gaz dans un état maxwellien en vue de l'interprétation des résultats.

La vitesse u vaut :

$$u = \frac{N_0 - N_3 + N_1 - N_2}{N_0 + N_3 + 2N_1 + 2N_2} = \frac{(\lambda+\mu)(\lambda\mu - 1)}{(\lambda+2\mu)\lambda\mu + (2\lambda+\mu)} \ . \tag{53}$$

On vérifie facilement que :

$$\sup(\omega_3 \ , \omega_4) \leqslant u \leqslant \inf(\omega_1 \ , \omega_2) \tag{54}$$

autrement dit u n'appartient pas au premier, ni au dernier intervalle de $\mathcal{E}$. Par ailleurs :

$$u + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{(3\lambda+4\mu)\lambda\mu - \mu}{(\lambda+2\mu)\lambda\mu + (2\lambda+\mu)} \ , \quad u - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2\mu - 4\lambda - 3\mu}{(\lambda+2\mu)\lambda\mu + (2\lambda+\mu)} \ .$$

Comme $H(\xi) = \xi^3(2N_1 + 2N_2 + 4N_0 + 4N_3) + \xi^2(-N_1 + N_2 - 4N_0 + 4N_3)$

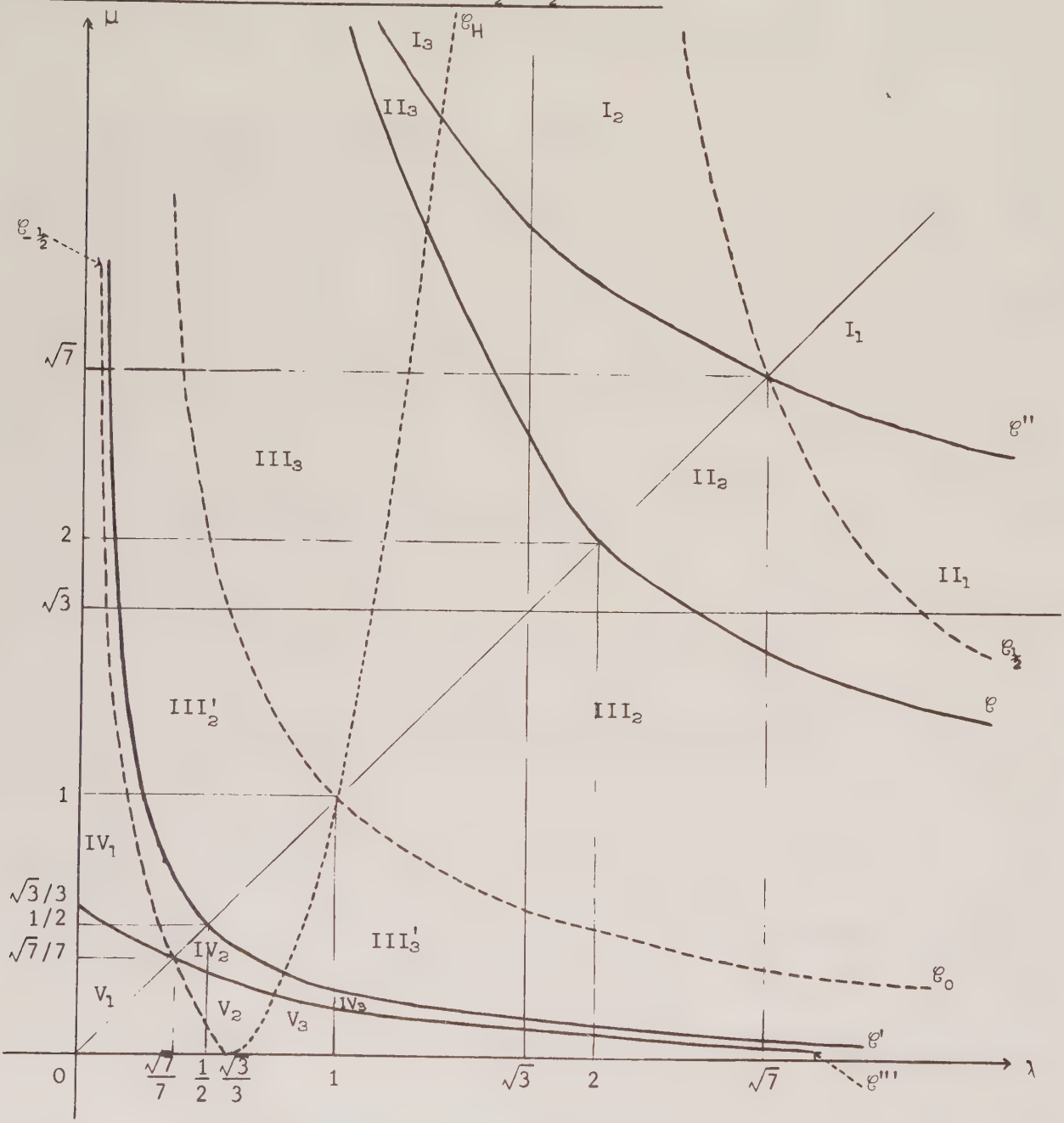
$$-\xi(N_0 + N_3 + 2N_1 + 2N_2) + (N_0 - N_3 + N_1 - N_2)$$

après développement de (48) il vient :

$$H(u) = 3u^2 \frac{1 - \lambda^2\mu^2 + 3\mu^2 - 3\lambda^2}{(\lambda+2\mu)\lambda\mu + (2\lambda+\mu)} \nu_0$$

On trace les courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_{-\frac{1}{2}}$, $\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$, $\mathcal{C}_H$ d'équations les numérateurs égalés à 0 des expressions respectivement de u, $u + \frac{1}{2}$, $u - \frac{1}{2}$ et $H(u)$. On a la figure suivante où on a indiqué les positions relatives des diverses courbes. Il faut remarquer que les courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice et que les courbes $\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$ et $\mathcal{C}''$ d'une part, et $\mathcal{C}_{-\frac{1}{2}}$ et $\mathcal{C}'''$ d'autre part sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la première bissectrice.

Tracé des courbes $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$, $\mathcal{C}'''$, $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$, $\mathcal{C}_{-\frac{1}{2}}$, et $\mathcal{C}_H$



G - LES ONDES DE CHOC DANS LE MILIEU SANS DISSIPATION

On connaît d'après le paragraphe précédent de manière compatible l'état maxwellien 1, l'état maxwellien 2 et la vitesse de déplacement de l'onde de de choc ξ. La direction des x a été choisie au moment de la description du modèle. On peut par suite déterminer le signe commun de $u^{(1)} - \xi$ et $u^{(2)} - \xi$ et placer l'aval et l'amont du choc. Mais on ignore encore lequel des milieux 1 ou 2 est amont autrement dit lequel des milieux 1 ou 2 est à $x = +\infty$. Dans le chapitre III on a résolu ce même problème pour des chocs infiniment faibles; on a donc obtenu un résultat local. On se propose ici de résoudre ce problème pour toutes les ondes de choc se propageant dans le milieu 1. Dans ce but on applique les conditions nécessaires de stabilité de Lax dans le milieu régi par les équations d'Euler (40), ou bien on étudie l'existence d'une structure de choc dans le milieu régi soit par les équations cinétiques exactes (37), soit par les équations de Navier-Stokes (42).

Le polynôme donnant les vitesses caractéristiques $\xi_3^{(1)}$, $\xi_2^{(1)}$, $\xi_1^{(1)}$ du système des équations d'Euler dans le milieu 1 est (48) que l'on écrit ici sous la forme :

$$H^{(1)}(\zeta) = (1-\zeta)(1-4\zeta^2)N_0^{(1)} - (1+\zeta)(1-4\zeta^2)N_3^{(1)} + (1-\zeta^2)(1-2\zeta)\,N_1^{(1)} - (1-\zeta^2)(1+2\zeta)N_2^{(1)} \ .$$

Les relations (46) donnant les densités $N_i^{(2)}$ en fonction des densités $N_i^{(1)}$ et de la vitesse ξ de déplacement de l'onde de choc se mettent sous la forme :

$$(55)\quad \begin{cases} N_0^{(2)} = N_0^{(1)} + \dfrac{1}{3\xi^2(1-\xi)}\, H^{(1)}(\xi) & N_3^{(2)} = N_3^{(1)} - \dfrac{1}{3\xi^2(1+\xi)}\, H^{(1)}(\xi) \\ N_1^{(2)} = N_1^{(1)} - \dfrac{1}{3\xi^2(1-2\xi)}\, H^{(1)}(\xi) & N_2^{(2)} = N_2^{(1)} + \dfrac{1}{3\xi^2(1+2\xi)}\, H^{(1)}(\xi) \ . \end{cases}$$

Dans le milieu 2 le polynôme donnant les vitesses caractéristiques $\xi_3^{(2)}$, $\xi_2^{(2)}$, $\xi_1^{(2)}$ du système des équations d'Euler est :

$$H^{(2)}(\zeta) = (1-\zeta)(1-4\zeta^2)N_0^{(2)} - (1+\zeta)(1-4\zeta^2)N_3^{(2)} + (1-\zeta^2)(1-2\zeta)N_1^{(2)} - (1-\zeta^2)(1+2\zeta)N_2^{(2)} \ .$$

Il est facile de montrer en utilisant (55) que :

$$(56)\qquad H^{(2)}(\xi) = -H^{(1)}(\xi)$$

Ceci est à rapprocher d'un résultat semblable établi en (III-(39)).

Conclusion

(57) Si ξ appartient au premier, deuxième ou troisième intervalle de $\mathcal{E}^{(1)}$ alors ξ appartient respectivement au premier, deuxième ou troisième intervalle de $\mathcal{E}^{(2)}$. De plus si $\xi > \xi_i^{(1)}$ alors $\xi < \xi_i^{(2)}$ et si $\xi < \xi_i^{(1)}$ alors $\xi > \xi_i^{(2)}$ pour $i = 1, 2, 3$, ξ et $\xi_i^{(1)}$ étant dans le même intervalle de $\mathcal{E}^{(1)}$

En effet soit $\xi \in]\sup(\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}), 1[$, alors ξ appartient à l'un des intervalles constituant $\mathcal{E}^{(2)}$ puisqu'on peut construire un état, à savoir l'état 1, lié à l'état 2 et à ξ par les relations de choc. Comme $\inf(\frac{1}{2}, \omega_2) \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \sup(\omega_1, \omega_2)$, ξ appartient obligatoirement à l'intervalle $]\sup(\omega_1^{(2)}, \omega_2^{(2)}), 1[$. Si de plus $\xi > \xi_1^{(1)}$ alors d'après (56) et (52) on a $\xi < \xi_1^{(2)}$. Les autres résultats de (57) se démontrent de manière analogue.

Les résultats (57) sont essentiels pour pouvoir appliquer les conditions de stabilité de Lax. On procède ici comme dans (III - § C-2) et on peut répéter les 2 figures de la fin de (III - § C-2) en remplaçant q par 3.

(58) Résultat. Soit ξ et $\xi_i^{(1)}$ appartenant à un même intervalle de $\mathcal{E}^{(1)}$

Pour $\xi > \xi_i^{(1)}$ les conditions de stabilité de Lax donnent l'état 1 à $\eta = +\infty$ et l'état 2 à $\eta = -\infty$.

Pour $\xi < \xi_i^{(1)}$ les conditions de stabilité de Lax donnent l'état 1 à $\eta = -\infty$ et l'état 2 à $\eta = +\infty$.

H - LES ONDES DE CHOC DANS LE MILIEU AVEC DISSIPATION DECRIT PAR LES EQUATIONS CINETIQUES EXACTES

On cherche s'il existe pour les équations cinétiques exactes (37) une solution ne dépendant que de la variable $\eta = x - \xi t$; les équations (37) se transforment en :

$$(59) \quad (1-\xi)\frac{dN_0}{d\eta} = -(1-2\xi)\frac{dN_1}{d\eta} = (1+2\xi)\frac{dN_2}{d\eta} = -(1+\xi)\frac{dN_3}{d\eta} = \frac{2B}{3}(N_1 N_2 - N_0 N_3).$$

Ces équations admettent les densités de l'état maxwellien 1 comme point singulier ; il existe alors un second point singulier à savoir les densités $N_i^{(2)}$

définies par (45) et déjà étudiées. Les équations différentielles (59) donnent les équations de la courbe intégrale joignant ces 2 points. Elles sont simples car dans (59) il y a 3 intégrales premières et (59) se réduit à une seule équation différentielle par exemple celle pour N_0 :

$$(1-\xi)(N_0 - N_0^{(1)}) = -(1-2\xi)(N_1 - N_1^{(1)}) = (1+2\xi)(N_2 - N_2^{(1)}) = -(1+\xi)(N_3 - N_3^{(1)})$$

$$\frac{dN_0}{d\eta} = 2B \frac{\xi^2}{(1+\xi)(1-4\xi^2)} (N_0 - N_0^{(1)})(N_0^{(2)} - N_0).$$

Mais on préfère pour la suite étudier l'équation différentielle pour la densité macroscopique n :

$$n = N_0 + N_3 + 2N_1 + 2N_2 = n^{(1)} - \frac{6\xi}{(1+\xi)(1-4\xi^2)} (N_0 - N_0^{(1)})$$

soit :

$$(60) \quad \begin{cases} \dfrac{dn}{d\eta} = -\dfrac{B}{3} \xi (n - n^{(1)})(n^{(2)} - n) \\ n^{(2)} = n^{(1)} - \dfrac{2}{\xi(1-\xi^2)(1-4\xi^2)} H^{(1)}(\xi) . \end{cases}$$

(60) définit n comme fonction de η ; on ne retient que les solutions qui sont définies pour tout $\eta \in]-\infty, +\infty[$, et alors n varie entre $n^{(1)}$ et $n^{(2)}$; η_0 est une constante d'intégration :

$$-\frac{B}{3} \xi (\eta - \eta_0) = \frac{1}{n^{(2)} - n^{(1)}} \operatorname{Log} \frac{n - n^{(1)}}{n^{(2)} - n}$$

ou bien :

$$(61) \quad n = \frac{n^{(1)} + n^{(2)} \exp\left\{-\frac{B}{3} \xi (n^{(2)} - n^{(1)})(\eta - \eta_0)\right\}}{1 + \exp\left\{-\frac{B}{3} \xi (n^{(2)} - n^{(1)})(\eta - \eta_0)\right\}} .$$

On remarque que $-\xi(n^{(2)} - n^{(1)}) = \dfrac{2H^{(1)}(\xi)}{(1-\xi^2)(1-4\xi^2)}$ a le signe de $-H^{(1)}(\xi)$ sur le premier et le dernier des intervalles constituant $\mathcal{E}^{(1)}$ et a le signe de $H^{(1)}(\xi)$ sur le second des intervalles constituant $\mathcal{E}^{(1)}$. En se rappelant les signes de $H^{(1)}(\xi)$ suivant ξ donnés en (52), $-\xi(n^{(2)} - n^{(1)})$ est négatif pour $\xi > \xi_i^{(1)}$ et positif pour $\xi < \xi_i^{(1)}$, ξ et $\xi_i^{(1)}$ étant dans un même intervalle de $\mathcal{E}^{(1)}$

(62) <u>Résultat</u> Soit ξ et $\xi_i^{(1)}$ appartenant à un même intervalle de $\mathcal{E}^{(1)}$

Pour $\xi > \xi_i^{(1)}$, n donné en (61) tend vers $n^{(1)}$ quand $\eta \longrightarrow +\infty$ et tend vers $n^{(2)}$ quand $\eta \longrightarrow -\infty$.

Pour $\xi < \xi_i^{(1)}$, n donné en (61) tend vers $n^{(1)}$ quand $\eta \longrightarrow -\infty$ et tend vers $n^{(2)}$ quand $\eta \longrightarrow +\infty$

Ce résultat est compatible avec le résultat (58).

I - LES ONDES DE CHOC DANS LE MILIEU AVEC DISSIPATION DECRIT PAR LES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

1 - Problème de la structure de l'onde de choc.

On cherche pour les équations de Navier-Stokes (42) une solution ne dépendant que de la variable $\eta = x - \xi t$. Il est évident qu'alors chaque équation du système (42) peut être intégrée une fois. Après intégration on obtient:

$$\begin{cases} n(u - \xi) = \text{ctte} \\ -n(\xi\delta + X) + \frac{3}{2B}\left\{\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\delta + 3u}{X - 1}\right) + \frac{2}{(X-1)^2}\frac{d}{d\eta}u\right\} = \text{ctte} \\ n(-2\xi u + 1 + \xi\delta) = \text{ctte} \\ \text{avec} \quad X = 1 - (u^2 + 2u\delta + 1)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

La 3ème équation provient de la combinaison $(0, 2, -1)$ des équations de (42). Les points singuliers de ce système sont évidemment deux états maxwelliens 1 et 2 reliés par les relations de choc (43). On a vu précédemment (§ F) qu'étant donnés l'état 1 et la vitesse ξ convenablement choisie l'état 2 est bien déterminé.

On va étudier la variation de la densité n par rapport à η, et on aura ainsi la structure de l'onde de choc pour la densité n.

2 - Equation différentielle vérifiée par la densité n.

Mettons en évidence l'état 1 dans les équations du paragraphe I-1 précédent :

$$\begin{cases} n(u - \xi) = n^{(1)}(u^{(1)} - \xi) \\ n(-2\xi u + 1 + \xi\delta) = n^{(1)}(-2\xi u^{(1)} + 1 + \xi\delta^{(1)}) \\ \frac{d}{d\eta}\left(\frac{\delta + 3u}{X - 1}\right) + \frac{2}{(X-1)^2}\frac{d}{d\eta}u - \frac{2B}{3}n(\xi\delta + X) = -\frac{2B}{3}n^{(1)}(\xi\delta^{(1)} + X^{(1)}). \end{cases}$$

Eliminons u et δ dans la 3ème équation à l'aide des deux premières :

$$(63) \qquad u = u^{(1)}\frac{n^{(1)}}{n} + \xi\left(1 - \frac{n^{(1)}}{n}\right)$$

$$(64) \qquad \delta = \delta^{(1)} \frac{n^{(1)}}{n} + \frac{2\xi^2 - 1}{\xi} \left(1 - \frac{n^{(1)}}{n}\right)$$

d'où une expression pour X :

$$(65) \quad X = 1 - \left\{ \left(\frac{n^{(1)}}{n}\right)^2 \left[(u^{(1)})^2 + 2\delta^{(1)} u^{(1)} + 1 \right] + \right.$$
$$\left. + 2 \frac{n^{(1)}}{n} \left(1 - \frac{n^{(1)}}{n}\right)\left(1 + \xi\delta^{(1)} + \frac{3\xi^2 - 1}{\xi} u^{(1)}\right) + \left(1 - \frac{n^{(1)}}{n}\right)^2 (5\xi^2 - 1) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

On déduit de (63), (64), (65) :

$$\frac{du}{d\eta} = (u^{(1)} - \xi) \frac{-n^{(1)}}{n^2} \frac{dn}{d\eta} \quad , \quad \frac{d}{d\eta}(\delta + 3u) = (\delta^{(1)} + 3u^{(1)} - \frac{5\xi^2 - 1}{\xi}) \frac{-n^{(1)}}{n^2} \frac{dn}{d\eta}$$

$$\frac{d}{d\eta}(X - 1) = \frac{1}{2(X - 1)} \left\{ 2 \frac{n^{(1)}}{n} \left[(u^{(1)})^2 + 2\delta^{(1)} u^{(1)} - 2\xi\delta^{(1)} - 2 \frac{3\xi^2 - 1}{\xi} u^{(1)} + 5\xi^2 - 2 \right] \right.$$
$$\left. + 2\left[\xi\delta^{(1)} + \frac{3\xi^2 - 1}{\xi} u^{(1)} - 5\xi^2 + 2 \right] \right\} \frac{-n^{(1)}}{n^2} \frac{dn}{d\eta} .$$

Avant d'écrire l'équation différentielle pour n notons que :

$$\frac{1}{(X - 1)^3} \left\{ (X - 1)^2 \frac{d}{d\eta}(\delta + 3u) - (\delta + 3u)(X - 1) \frac{d}{d\eta}(X - 1) + 2(X - 1) \frac{du}{d\eta} \right\} = \frac{2B}{3} \left\{ n X \right.$$
$$\left. - n^{(1)} X^{(1)} + (2\xi^2 - 1)(n - n^{(1)}) \right\}.$$

On utilise les calculs de dérivées précédents et les formules (63), (64) et (65):

$$(66) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{(X - 1)^3} \dfrac{-n^{(1)}}{n^2} \left\{ 2(X - 1)(u^{(1)} - \xi) + \dfrac{5\xi^2 - 1}{\xi^2} (u^{(1)} - \xi) + \dfrac{n^{(1)}}{n} \left[(u^{(1)})^2 \dfrac{2(2\xi^2 - 1)}{\xi} \right. \right. \\ \qquad \left. \left. + \delta^{(1)} u^{(1)} \dfrac{1 - 4\xi^2}{\xi} + (\delta^{(1)})^2 \xi + \delta^{(1)} + u^{(1)} \dfrac{1 - 2\xi^2}{\xi^2} \right\} \dfrac{dn}{d\eta} \right. \\ \qquad = \dfrac{2B}{3} \left\{ n X - n^{(1)} X^{(1)} + (2\xi^2 - 1)(n - n^{(1)}) \right\} \\ \text{avec } X \text{ donné par (65).} \end{cases}$$

La manière dont figurent n, l'état 1 et ξ dans cette équation différentielle n'est pas très simple. Afin de faciliter l'étude de $\frac{dn}{d\eta}$ faite dans le paragraphe suivant on va mettre en évidence la manière dont apparaît n dans (66). A la place des paramètres $n^{(1)}$, $u^{(1)}$, $\delta^{(1)}$ et ξ on prendra les densités $N_i^{(1)}$ et ξ :

On pose :

$$
(67)\quad
\begin{cases}
B(\xi) = -5\xi^3(N_0 + N_3 + 2N_1 + 2N_2) + \xi^2(4N_0 - 4N_3 + N_1 - N_2) + 2\xi(N_0 + N_3 + 2N_1 + 2N_2) \\
\qquad - (N_0 - N_3 + N_1 - N_2) \\
C(\xi) = 5\xi^3(N_0 + N_3 + 2N_1 + 2N_2)^2 - 2\xi^2(N_0 + N_3 + 2N_1 + 2N_2)(4N_0 - 4N_3 + N_1 - N_2) \\
\qquad + \xi[3(N_0 - N_3)^2 - 3(N_1 - N_2)^2 - 2(N_0 + N_3 + 2N_1 + 2N_2)^2] \\
\qquad + 2(N_0 + N_3 + 2N_1 + 2N_2)(N_0 - N_3 + N_1 - N_2) \\
D(\xi) = [\xi^2(N_0 - N_3 + 4N_1 - 4N_2) - (N_0 - N_3 + N_1 - N_2)][\xi(N_0 - N_3 + 4N_1 - 4N_2) \\
\qquad - (N_0 + N_3 + 2N_1 + 2N_2)] \\
b(\xi) = (N_0 - N_3 + N_1 - N_2) - \xi(N_0 + N_3 + 2N_1 + 2N_2) \\
d(\xi) = 2\xi^2(N_0 + N_3 + 2N_1 + 2N_2) - (2N_0 + 2N_3 + N_1 + N_2)\cdot
\end{cases}
$$

Dans l'état 1 ces polynômes en ξ sont notés $B^{(1)}(\xi)$, $C^{(1)}(\xi)$,... et dans l'état 2, $B^{(2)}(\xi)$, $C^{(2)}(\xi)$,... . Les équations (65) et (66) en utilisant (38) et (67) s'écrivent :

$$
(68)\quad \frac{dn}{d\eta} = \frac{2B}{3}\,\frac{\xi^2(1-\xi^2)(1-4\xi^2)[n(1-X)]^3\,(n^{(1)}-n)(n-n^{(2)})}{[n(X-1) - 2\xi^2 n + d^{(1)}(\xi)][2\xi^2 b^{(1)}(\xi)\,n(X-1) + n(5\xi^2-1)b^{(1)}(\xi) + D^{(1)}(\xi)]}
$$

avec :

$$
(69)\qquad n(1-X) = \left[n^2(5\xi^2-1) + \frac{2n}{\xi}\,B^{(1)}(\xi) + \frac{1}{\xi}\,C^{(1)}(\xi)\right]^{\frac{1}{2}}
$$

car :

$$
n\,X - n^{(1)}X^{(1)} + (2\xi^2-1)(n-n^{(1)}) = \frac{(1-\xi^2)(1-4\xi^2)(n-n^{(1)})(n^{(2)}-n)}{n(X-1) - 2\xi^2 n + d^{(1)}(\xi)}
$$

$n^{(2)}$ est définie en (60); cette dernière relation résulte de (69), de la remarque $d^{(1)}(\xi) = (2\xi^2 - 1)\,n^{(1)} + n^{(1)}X^{(1)}$ et de quelques calculs.

3 - Etude de l'équation différentielle vérifiée par la densité n

Le but de ce paragraphe est d'étudier le signe du second membre de (68). Le signe du numérateur est évident mais celui du dénominateur est plus difficile à trouver.

(70) Remarque. Les quantités définies par les polynômes (67) sont des quantités invariantes à travers l'onde de choc ce qui signifie :

$$
B^{(1)}(\xi) = B^{(2)}(\xi)\ ,\quad C^{(1)}(\xi) = C^{(2)}(\xi)\ ,\quad D^{(1)}(\xi) = D^{(2)}(\xi)\ ,\quad b^{(1)}(\xi) = b^{(2)}(\xi),
$$

$$
d^{(1)}(\xi) = d^{(2)}(\xi)
$$

On démontre (70) en utilisant par exemple les relations (55).

a) Le trinôme $\mathcal{T}(n) = n^2(5\xi^2 - 1) + \frac{2n}{\xi} B^{(1)}(\xi) + \frac{1}{\xi} C^{(1)}(\xi)$ est positif pour n entre $n^{(1)}$ et $n^{(2)}$ et $\xi \in \mathcal{E}^{(1)}$.

$\mathcal{T}(n^{(1)}) = (2N_0^{(1)} + 2N_3^{(1)} + N_1^{(1)} + N_2^{(1)})^2$ est positif, et de même $\mathcal{T}(n^{(2)})$ est positif. Pour $5\xi^2 - 1 \leqslant 0$ il est évident que $\mathcal{T}(n) > 0$.

Appelons $S_{\mathcal{T}}$ la demi-somme des racines réelles ou non du trinôme $\mathcal{T}(n)$, et $\Delta_{\mathcal{T}}$ le discriminant réduit. On a :

$$\Delta_{\mathcal{T}} - 2n^{(1)}(5\xi^2 - 1)(n^{(1)} - S_{\mathcal{T}}) = \frac{1}{\xi^2}\left\{[B^{(1)}(\xi)]^2 - \xi(5\xi^2 - 1) C^{(1)}(\xi) - 2n^{(1)}\xi\,[\xi(5\xi^2 - 1)n^{(1)} + B^{(1)}(\xi)]\right\}.$$

Le crochet du second membre est de la forme $-\nu_1 \xi^4 + \nu_2(1 - 5\xi^2)$ avec ν_1 et ν_2 positifs.

Pour $5\xi^2 - 1 > 0$ et $\Delta_{\mathcal{T}} \leqslant 0$ on a évidemment $\mathcal{T}(n) > 0$. Pour $5\xi^2 - 1 > 0$ et $\Delta_{\mathcal{T}} > 0$ la relation ci-dessus indique que $n^{(1)} - S_{\mathcal{T}}$ est positif; de même on montrerait $n^{(2)} - S_{\mathcal{T}} > 0$ et par suite $\mathcal{T}(n)$ est bien positif pour n entre $n^{(1)}$ et $n^{(2)}$.

b) L'expression $n(X - 1) - 2\xi^2 n + d^{(1)}(\xi)$ est négative pour n variant entre $n^{(1)}$ et $n^{(2)}$.

D'après (69) $n(X - 1)$ est négatif. Par ailleurs $-2\xi^2 n + d^{(1)}(\xi)$ est une fonction décroissante de n et a une valeur négative pour $n = n^{(1)}$ et $n = n^{(2)}$:

$$- 2\xi^2 n^{(1)} + d^{(1)}(\xi) = -(2N_0^{(1)} + 2N_3^{(1)} + N_1^{(1)} + N_2^{(1)})$$

$$- 2\xi^2 n^{(2)} + d^{(1)}(\xi) = - 2\xi^2 n^{(2)} + d^{(2)}(\xi) = -(2N_0^{(2)} + 2N_3^{(2)} + N_1^{(2)} + N_2^{(2)}).$$

le résultat énoncé en b) est donc démontré.

c) Définition de $\mathcal{Y}(n)$. On pose :

(71) $$\mathcal{Y}(n) = 2\xi^2 b^{(1)}(\xi)\, n(X - 1) + n(5\xi^2 - 1)\, b^{(1)}(\xi) + D^{(1)}(\xi)$$

$n(1 - X)$ est donné en (69). On a à chercher le signe de $\mathcal{Y}(n)$ pour n entre $n^{(1)}$ et $n^{(2)}$ et pour $\xi \in \mathcal{E}^{(1)}$. On cherche en premier lieu le signe de $\mathcal{Y}(n^{(1)})$ et de $\mathcal{Y}(n^{(2)})$.

d) Etude de $\mathcal{Y}(n^{(1)})$

$$\mathcal{Y}(n^{(1)}) = -2\xi^2\, b^{(1)}(\xi)(2N_0^{(1)} + 2N_3^{(1)} + N_1^{(1)} + N_2^{(1)}) + n^{(1)}(5\xi^2 - 1)\, b^{(1)}(\xi) + D^{(1)}(\xi).$$

Afin d'alléger les notations dans l'étude du signe de $\mathcal{Y}(n^{(1)})$ on supprime les indices (1) et on réécrit $\mathcal{Y}(n^{(1)})$ avec les notations (51) :

$$\mathcal{Y}(n^{(1)}) = \nu_0^2\,\xi\Big\{-2\xi^2\Big(34 + \lambda\mu + 9\frac{\lambda}{\mu} + 9\frac{\mu}{\lambda} + \frac{1}{\lambda\mu}\Big) + 3\xi\Big(\lambda\mu + 3\frac{\lambda}{\mu} - 3\frac{\mu}{\lambda} - \frac{1}{\lambda\mu}\Big) + \Big(20 - \lambda\mu + 9\frac{\lambda}{\mu} + 9\frac{\mu}{\lambda} - \frac{1}{\lambda\mu}\Big)\Big\}.$$

le crochet, que l'on notera $z = z(\xi)$, est un trinôme du second degré en ξ. Afin d'en connaître le signe pour $\xi \in \mathcal{E}$ il est nécessaire d'étudier le signe de z aux bornes de chacun des intervalles constituant $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E}$ est défini dans le paragraphe F-2)

$$z(1) = -\Big(48 + 18\frac{\lambda}{\mu} + 18\frac{\mu}{\lambda}\Big) < 0$$

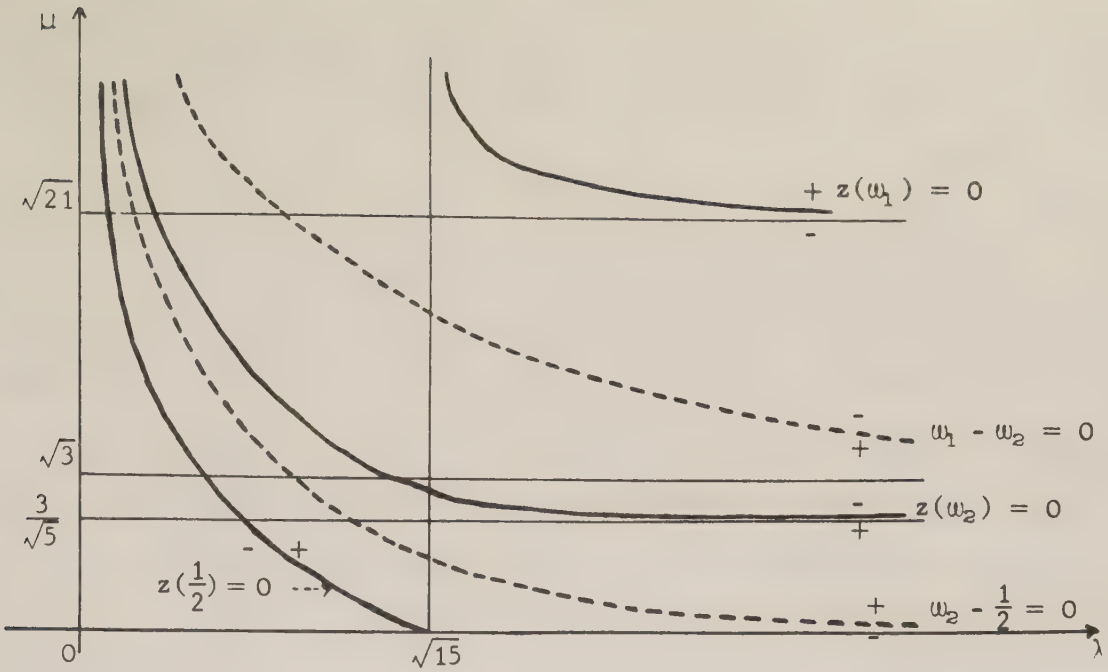
$$z\Big(\frac{1}{2}\Big) = 3\Big(1 + 3\frac{\lambda}{\mu} - \frac{1}{\lambda\mu}\Big).$$

Pour $\omega_1 = \dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}$ et $\omega_2 = \dfrac{\lambda\mu - 1}{\lambda\mu + 2}$ on a :

$$z(\omega_1) = \frac{1}{\lambda\mu(\lambda+2\mu)^2}(\lambda^3\mu^3 - 38\lambda^2\mu^2 + \lambda\mu(-17 - 21\lambda^2 - 15\mu^2) - 6\lambda^2 - 12\mu^2)$$

$$z(\omega_2) = \frac{9}{\lambda\mu(\lambda\mu+2)^2}(-5\lambda^3\mu^3 + \lambda^2\mu^2(-2\mu^2 + 22) + \lambda\mu(9\lambda^2 + 7\mu^2 + 1) + 4\mu^2).$$

Dans le quart de plan $\lambda > 0$, $\mu > 0$ on trace sur un même dessin les courbes représentatives des équations $z(\frac{1}{2}) = 0$, $z(\omega_1) = 0$, $z(\omega_2) = 0$ et les courbes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}''$ dont les équations sont $\omega_2 - \frac{1}{2} = 0$ et $\omega_1 - \omega_2 = 0$ (déjà étudiées dans le paragraphe F-2). On a indiqué sur la figure les signes de $z(\frac{1}{2})$, $z(\omega_1)$, $z(\omega_2)$, $\omega_2 - \frac{1}{2}$, $\omega_1 - \omega_2$ de part et d'autre des lignes $z(\frac{1}{2}) = 0$, $z(\omega_1) = 0$, $z(\omega_2) = 0$, $\omega_2 - \frac{1}{2} = 0$, $\omega_1 - \omega_2 = 0$.



A partir de cette figure on déduit le signe de $\mathcal{Y}(n^{(1)})$ pour $\xi = \sup(\omega_1, \omega_2)$ et $\xi = \inf(\omega_2, \frac{1}{2})$:

Si $\sup(\omega_1, \omega_2) = \omega_1$, $\omega_1 - \omega_2$ est positif et par suite $z(\omega_1)$ est négatif

Si $\sup(\omega_1, \omega_2) = \omega_2$, $\omega_1 - \omega_2$ est négatif et par suite $z(\omega_2)$ est négatif

Si $\inf(\omega_2, \frac{1}{2}) = \omega_2$, $\omega_2 - \frac{1}{2}$ est négatif et par suite $z(\omega_2)$ est positif

Si $\inf(\omega_2, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $\omega_2 - \frac{1}{2}$ est positif et par suite $z(\frac{1}{2})$ est positif

D'où la conclusion :

$$(72)\quad \begin{cases} \text{Pour} \quad \xi = \sup(\omega_1, \omega_2), \quad z(\xi) \quad \text{est négatif} \\ \text{Pour} \quad \xi = \inf(\omega_2, \frac{1}{2}), \quad z(\xi) \quad \text{est positif} . \end{cases}$$

Un résultat analogue peut être obtenu pour $\xi = \sup(\omega_3, -\frac{1}{2})$ et pour $\xi = \inf(\omega_3, \omega_4)$; il suffit pour l'avoir de changer λ en $\frac{1}{\lambda}$ et μ en $\frac{1}{\mu}$ dans l'étude précédente. On a :

$$(73)\quad \begin{cases} \text{Pour} \quad \xi = \sup(\omega_3, -\frac{1}{2}) , \quad z(\xi) \quad \text{est positif} \\ \text{Pour} \quad \xi = \inf(\omega_3, \omega_4) , \quad z(\xi) \quad \text{est négatif} . \end{cases}$$

Comme $z = z(\xi)$ est un trinôme en ξ, on déduit de (72) et (73) le signe de z pour tout ξ de $\mathcal{E}$. Le signe de $\mathcal{Y}(n^{(1)})$ s'en déduit :

ξ	-1	$\inf(\omega_3^{(1)},\omega_4^{(1)})$	$\sup(\omega_3^{(1)},-\frac{1}{2})$	$\inf(\omega_2^{(1)},\frac{1}{2})$	$\sup(\omega_1^{(1)},\omega_2^{(2)})$	1
(74) $y(n^{(1)})$		signe de $-\xi$		signe de ξ		signe de $-\xi$

e) Etude de $y(n^{(2)})$

D'après la remarque (70) $y(n^{(2)})$ a exactement la même expression que $y(n^{(1)})$ à condition de remplacer $N_i^{(1)}$ par $N_i^{(2)}$, $i = 0, 1, 2, 3$. L'étude faite précédemment pour le signe de $y(n^{(1)})$ se transpose ici : $y(n^{(2)})$ a le signe de $-\xi$ dans le premier et le troisième intervalle de $\mathcal{E}^{(2)}$ et a le signe de ξ dans le second intervalle de $\mathcal{E}^{(2)}$. Mais on se rappelle la conclusion (57) disant que si ξ appartient au premier, deuxième ou troisième intervalle de $\mathcal{E}^{(1)}$ alors ξ appartient respectivement au premier, deuxième ou troisième intervalle de $\mathcal{E}^{(2)}$. En conséquence $y(n^{(2)})$ a le signe de $-\xi$ dans le premier et le troisième intervalle de $\mathcal{E}^{(1)}$ et a le signe de ξ dans le second intervalle de $\mathcal{E}^{(1)}$. $y(n^{(2)})$ et $y(n^{(1)})$ sont de même signe pour $\xi \in \mathcal{E}^{(1)}$.

f) Etude de $y(n)$

f_1) signe de $y(n)$ pour $\xi \in]\sup(\omega_1^{(1)},\omega_2^{(1)}), 1[$ et n entre $n^{(1)}$ et $n^{(2)}$.

On a vu dans le paragraphe F-2 que $\sup(\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)})$ est supérieur à $u^{(1)}$ et à $1/2$.

Dans le cas étudié $y(n^{(1)})$ et $y(n^{(2)})$ sont négatifs. $2\xi^2\, b^{(1)}(\xi)\, n(X-1)$ est positif car $b^{(1)}(\xi) = n^{(1)}(u^{(1)} - \xi)$ et $n(X-1)$ sont négatifs. Donc $n(5\xi^2 - 1)\, b^{(1)}(\xi) + D^{(1)}(\xi)$ est négatif pour $n = n^{(1)}$ et pour $n = n^{(2)}$, et par suite pour tout n compris entre $n^{(1)}$ et $n^{(2)}$. $y(n)$ est donc de même signe que $z = 4\xi^4[b^{(1)}(\xi)]^2\, n^2(X-1)^2 - [n(5\xi^2 - 1)\, b^{(1)}(\xi) + D^{(1)}(\xi)]^2$

z est un trinôme en n, négatif pour $n = n^{(1)}$ et pour $n = n^{(2)}$, dont le coefficient de n^2 est négatif et dont la valeur pour $n = \dfrac{-D^{(1)}(\xi)}{(5\xi^2 - 1)\, b^{(1)}(\xi)}$ est positive. Comme $n^{(1)}$ et $n^{(2)}$ sont toutes deux supérieures à $-\dfrac{D^{(1)}(\xi)}{(5\xi^2 - 1) b^{(1)}(\xi)}$ il en résulte que z est négatif pour tout n compris entre $n^{(1)}$ et $n^{(2)}$.

f_2) signe de $y(n)$ pour $\xi \in]-1, \inf(\omega_3^{(1)}, \omega_4^{(1)})[$ et n entre $n^{(1)}$ et $n^{(2)}$.

Un raisonnement analogue au précédent donne $y(n)$ positif sur le domaine envisagé.

(75) Remarque. Dans le paragraphe F-2, à un état maxwellien on a associé :

$$\omega_2 = \frac{\lambda\mu - 1}{\lambda\mu + 2} \quad , \quad \omega_3 = \frac{\lambda\mu - 1}{2\lambda\mu + 1} \quad , \quad u = \frac{(\lambda+\mu)(\lambda\mu - 1)}{(\lambda + 2\mu)\lambda\mu + (2\lambda + \mu)} .$$

Ces quantités sont de même signe. Le second intervalle de $\mathcal{E}$, $\left]\sup(\omega_3, -\frac{1}{2}), \inf(\omega_2, \frac{1}{2})\right[$ est donc tout entier du côté des ξ positifs ou tout entier du côté des ξ négatifs.

f_3) Signe de $\mathcal{Y}(n)$ pour $\xi \in \left]\sup(\omega_3^{(1)}, -\frac{1}{2}) , \inf(\omega_2^{(1)}, \frac{1}{2})\right[$ et n entre $n^{(1)}$ et $n^{(2)}$. On étudie d'abord le cas où $\omega_2^{(1)}$, $\omega_3^{(1)}$ et $u^{(1)}$ sont positifs.

Dans ces conditions $\sup(\omega_3^{(1)}, -\frac{1}{2}) = \omega_3^{(1)}$, $\sup(\omega_3^{(1)}, \omega_4^{(1)}) = \omega_3^{(1)}$ et on a $\omega_3^{(1)} < u^{(1)}$ d'après (54). On distingue deux cas :

Cas I : $\xi \in \left]\omega_3^{(1)} , \inf(u^{(1)}, \inf(\omega_2^{(1)}, \frac{1}{2}))\right[$

Une étude de signes analogue à celle faite en f_1) permet de conclure que $\mathcal{Y}(n)$ demeure positif pour tout n compris entre $n^{(1)}$ et $n^{(2)}$.

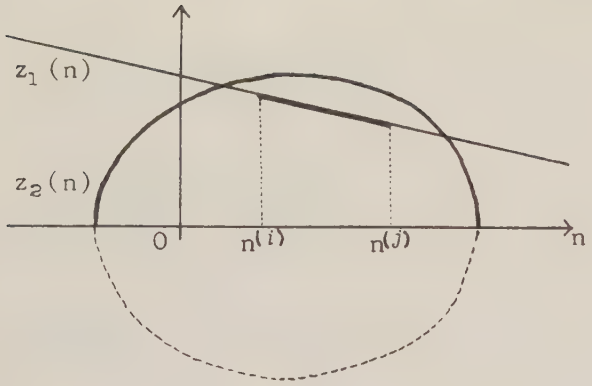
Cas II : $\xi \in \left]\inf(u^{(1)} , \inf(\omega_2^{(1)}, \frac{1}{2})) , \inf(\omega_2^{(1)}, \frac{1}{2})\right[$

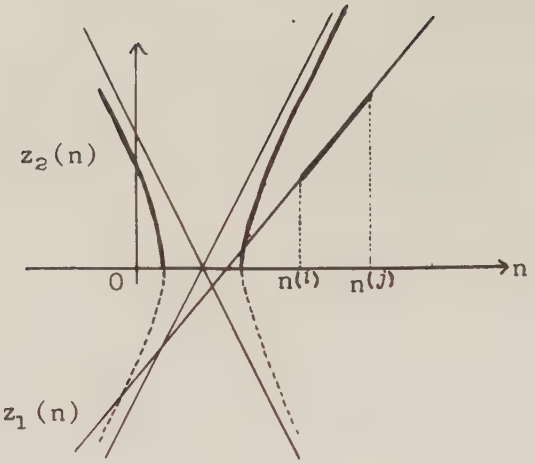
Cet intervalle pour ξ peut éventuellement être vide. $\mathcal{Y}(n^{(1)})$ et $\mathcal{Y}(n^{(2)})$ sont positifs. On pose $\mathcal{Y}(n) = 2\xi^2 \, b^{(1)}(\xi)(z_1 - z_2)$ avec

$$z_1 = \frac{5\xi^2 - 1}{2\xi^2} n + \frac{D^{(1)}(\xi)}{2\xi^2 \, b^{(1)}(\xi)} \qquad \text{et} \qquad z_2 = n(1 - X) .$$

Si $5\xi^2 - 1 \leqslant 0$, la fonction $z_2 = z_2(n)$ représente une ellipse et la fonction $z_1 = z_1(n)$ une droite. En $n^{(1)}$ et en $n^{(2)}$, $z_1 - z_2$ est négatif ; l'ellipse étant une figure concave on déduit que $z_1 - z_2$ est négatif pour tout n entre $n^{(1)}$ et $n^{(2)}$ (voir figure ci-dessous).

Si $5\xi^2 - 1 > 0$ la fonction $z_2 = z_2(n)$ représente une hyperbole rencontrant l'axe des n car le discriminant $\Delta\tau$ introduit en a) est positif ($\Delta\tau$ s'écrit comme somme de termes de la forme $\nu_{ij} \, N_i^{(1)} \, N_j^{(1)}$ avec ν_{ij} positif pour $\sqrt{\frac{1}{5}} < \xi < \frac{1}{2}$). D'après a) $(n^{(1)} , z_2(n^{(1)}))$ et $(n^{(2)} , z_2(n_2^{(2)}))$ sont sur une même branche de l'hyperbole. En $n^{(1)}$ et en $n^{(2)}$, $z_1 - z_2$ est négatif, donc $z_1 - z_2$ est négatif pour tout n entre $n^{(1)}$ et $n^{(2)}$.





En conclusion $y(n)$ est positif pour tout n compris entre $n^{(1)}$ et $n^{(2)}$. Dans le cas où $u_2^{(1)}$, $u_3^{(1)}$ et $u^{(1)}$ sont négatifs on démontre de manière analogue que $y(n)$ est négatif pour tout n compris entre $n^{(1)}$ et $n^{(2)}$.

Conclusion. $y(n)$ défini en (71) garde un signe constant lorsque n varie entre $n^{(1)}$ et $n^{(2)}$, à savoir celui de $y(n^{(1)})$ indiqué en (74).

g) Conséquence pour l'équation différentielle (68)

Pour $\xi \in \mathcal{E}^{(1)}$ et pour n compris entre $n^{(1)}$ et $n^{(2)}$ le second membre de (68) a le signe de $-(1-4\xi^2)\ y(n)$. Le signe de $1-4\xi^2$ est déterminé sur chacun des intervalles constituant $\mathcal{E}^{(1)}$. On a en définitive $\frac{dn}{d\eta}$ du signe de $-\xi$, et on peut écrire (68) sous la forme :

$$(76)\qquad \begin{cases} \dfrac{dn}{d\eta} = -\dfrac{B}{3}\,\xi\, f(n, \xi, N_i^{(1)})\,(n-n^{(1)})(n^{(2)}-n) \\ \text{avec} \quad f(n, \xi, N_i^{(1)}) > 0 \quad \text{pour} \quad \xi \in \mathcal{E}^{(1)} \text{ et } n \text{ entre } n^{(1)} \text{ et } n^{(2)}. \end{cases}$$

La fonction $n = n(\eta)$ solution de (76) est donc monotone. En comparant cette équation (76) et l'équation (60) on peut affirmer que le résultat (62) est encore valable dans le cas présent.

L'étude de la structure de l'onde de choc à partir des équations de Navier-Stokes donne un résultat compatible avec les deux résultats précédents (58) et (62).

J - INTERPRETATION DES RESULTATS

Comme dans (III - § C-5) les vitesses $\xi_i^{(1)} - u^{(1)}$, $i = 1, 2, 3$ sont les vitesses de propagation du son dans le milieu 1. On a : $\xi_3^{(1)} - u^{(1)} < \xi_2^{(1)} - u^{(1)} < \xi_1^{(1)} - u^{(1)}$; la vitesse de gauche est négative, celle de droite positive, celle du centre n'a pas un signe déterminé.

On introduit des grandeurs macroscopiques décrivant le gaz et déjà définies en (I-(20)) :

$$n = \sum_{i=0}^{5} N_i \qquad n u = \sum_{i=0}^{5} N_i u_i$$

$$P_{xx} = m \sum_{i=0}^{5} N_i (u_i^2 - u^2) \qquad \mathcal{P} = \frac{m}{3} n(1 - u^2) .$$

On a les relations de choc déduites des lois de conservation (I-(31)) :

$$(77) \qquad \begin{cases} n^{(1)} (u^{(1)} - \xi) = n^{(2)} (u^{(2)} - \xi) \\ p_{xx}^{(1)} + n^{(1)} u^{(1)} (u^{(1)} - \xi) = p_{xx}^{(2)} + n^{(2)} u^{(2)} (u^{(2)} - \xi) \end{cases}$$

par ailleurs :

$$(78) \qquad \mathcal{P}^{(2)} - \mathcal{P}^{(1)} = \frac{m}{3}(n^{(2)} - n^{(1)}) \left\{ 1 - \xi^2 + \frac{n^{(1)}}{n^{(2)}} (u^{(1)} - \xi)^2 \right\} .$$

On rappelle la formule (60) :

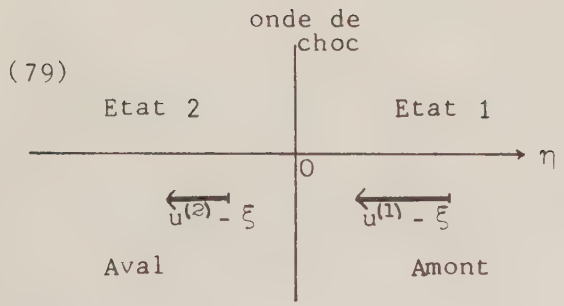
$$n^{(2)} = n^{(1)} - \frac{2}{\xi(1 - \xi^2)(1 - 4\xi^2)} H^{(1)} (\xi) .$$

Etant donné l'état maxwellien 1, suivant le choix de la vitesse ξ de déplacement de l'onde de choc dans $\mathcal{E}^{(1)}$ on obtient des résultats physiques différents. Nous ferons deux études, la première pour $\xi \in]\sup(\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}), 1[$ et la seconde pour $\xi \in]\sup(-\frac{1}{2}, \omega_3^{(1)}), \inf(\frac{1}{2}, \omega_2^{(1)})[$ avec $\omega_3^{(1)}$, $\omega_2^{(1)}$ tous deux positifs. Les autres choix possibles pour ξ se traîtent de la même façon et ne donnent pas de résultats nouveaux.

1ère étude : $\xi \in]\sup(\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}), 1[$

On suppose d'abord $\xi \in]\xi_1^{(1)}, 1[$

(52) et (60) donnant le signe de $H^{(1)} (\xi)$ et celui de $n^{(2)} - n^{(1)}$, les résultats (57) et (58) et les relations (77) et (78) permettent la récapitulation suivante :



(79)

$$n^{(2)} > n^{(1)}$$

$$0 < \xi - u^{(2)} < \xi - u^{(1)}$$

$$p_{xx}^{(2)} > p_{xx}^{(1)}$$

$$\pi^{(2)} > \pi^{(1)}$$

$$\xi - u^{(1)} > \xi_1^{(1)} - u^{(1)} > 0$$

$$0 < \xi - u^{(2)} < \xi_1^{(2)} - u^{(2)}$$

En particulier la densité n et la pression π sont plus grandes dans l'état aval que dans l'état amont. La vitesse des particules du milieu 1 par rapport au choc, $\xi - u^{(1)}$, est supersonique, tandis que la vitesse des particules du milieu 2 par rapport au choc est subsonique. Ces résultats sont conformes aux résultats classiques établis en dynamique des gaz et concernant la traversée d'une onde de choc.

On suppose maintenant $\xi \in \left]\sup(\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}), \xi_1^{(1)}\right[$.

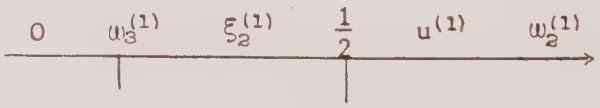
Les résultats sont exactement les mêmes que ci-dessus à condition d'échanger les état 1 et 2.

2ème étude : $\xi \in \left]\sup(-\frac{1}{2}, \omega_3^{(1)}), \inf(\frac{1}{2}, \omega_2^{(1)})\right[$, $\omega_2^{(1)}, \omega_3^{(1)}$ positifs .

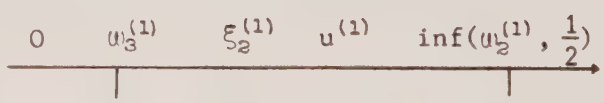
Comme $\omega_2^{(1)}$ et $\omega_3^{(1)}$ sont positifs, $u^{(1)}$ l'est aussi; sur la figure du paragraphe F, $(\lambda^{(1)}, \mu^{(1)})$ est un point de l'une des régions I, II, III_2, III_3.

La lecture de cette figure permet d'avoir les positions relatives des différentes grandeurs $\sup(-\frac{1}{2}, \omega_3^{(1)}) = \omega_3^{(1)}$, $u^{(1)}$, $\xi_2^{(1)}$, $\frac{1}{2}$ et $\omega_2^{(1)}$:

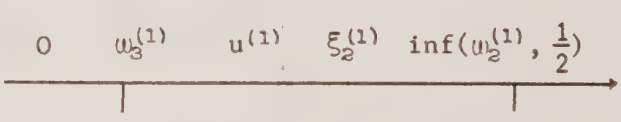
Si $(\lambda^{(1)}, \mu^{(1)})$ est dans $I_1 \cup II_1$ on a



Si $(\lambda^{(1)}, \mu^{(1)})$ est dans $I_2 \cup II_2 \cup III_2$ on a

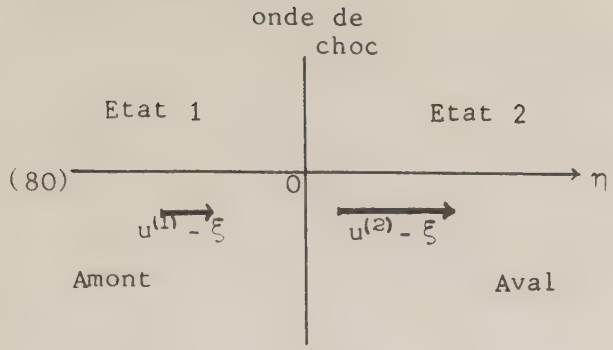


Si $(\lambda^{(1)}, \mu^{(1)})$ est dans $I_3 \cup II_3 \cup III_3$ on a



On a 4 cas à examiner

1°) $\xi \in \left]\omega_3^{(1)}, \inf(\xi_2^{(1)}, u^{(1)})\right[$. Comme dans la première étude on peut récapituler les résultats :



$$n^{(2)} < n^{(1)}$$

$$0 < u^{(1)} - \xi < u^{(2)} - \xi$$

$$p_{xx}^{(2)} < p_{xx}^{(1)}$$

$$\wp^{(2)} < \wp^{(1)}$$

$$u^{(1)} - \xi > u^{(1)} - \xi_2^{(1)}$$

$$u^{(2)} - \xi < u^{(2)} - \xi_2^{(2)} \ .$$

En particulier la densité n et la pression $\wp$ sont plus grandes dans l'état amont que dans l'état aval. A la traversée de l'onde la fonction $H = \sum_{i=0}^{5} N_i \ \mathrm{Log}\ N_i$ n'est pas constante, H joue le rôle de l'entropie.

On dira que l'on a ici une onde de choc de détente.

2°) $\xi \in \left]\xi_2^{(1)}, \inf\left(\frac{1}{2}, \omega_2^{(1)}, u^{(1)}\right)\right[$.

On a exactement les mêmes résultats que ci-dessus à condition d'échanger les états 1 et 2.

3°) $\xi \in \left]\sup\left(u^{(1)}, \xi_2^{(1)}\right), \inf\left(\omega_2^{(1)}, \frac{1}{2}\right)\right[$.

On a dans ce cas les mêmes inégalités qu'en (79) à condition de remplacer les deux dernières inégalités par :

$$\xi - u^{(1)} > \xi_2^{(1)} - u^{(1)} \quad , \quad 0 < \xi - u^{(2)} < \xi_2^{(2)} - u^{(2)} \ .$$

La disposition des états 1 et 2 est comme en (79). La densité n et la pression $\wp$ sont plus grandes dans l'état aval que dans l'état amont. On ne peut pas toujours dire que la vitesse des particules du milieu 1 par rapport au choc , $\xi - u^{(1)}$, est supersonique car $\xi - u^{(1)}$ est positif et $\xi_2^{(1)} - u^{(1)}$ est positif si $(\lambda^{(1)}, \mu^{(1)}) \in I_3 \cup II_3 \cup III_3$ mais est négatif si $(\lambda^{(1)}, \mu^{(1)}) \in I_2 \cup II_2 \cup III_2$. Dans le premier cas on peut le dire et ce résultat est conforme au résultat établi pour les ondes de choc faibles à la fin du chapitre III (III-§ C-5). Dans le second cas l'onde de choc et les perturbations sonores se propagent dans le milieu 1 dans deux directions opposées. Par contre la vitesse des particules du milieu 2 par rapport au choc est subsonique.

4°) $\xi \in \left]u^{(1)}, \xi_2^{(1)}\right[$

On a exactement les mêmes résultats que dans le 3°) à condition d'échanger les états 1 et 2.

Conclusion. Etant donné l'état maxwellien 1, les ondes de choc se déplaçant avec la vitesse ξ appartenant au premier et au troisième intervalles de $\mathcal{E}^{(1)}$ sont des ondes de choc de compression analogues à celles de la dynamique des gaz. En particulier si le milieu 1 est au repos le second intervalle de $\mathcal{E}^{(1)}$ disparaît et on a uniquement des ondes de choc de compression [14]. Pour ξ appartenant au second intervalle de $\mathcal{E}^{(1)}$, les ondes de choc obtenues peuvent être des ondes de choc de compression comme précédemment mais aussi des ondes de choc de détente.

K - STRUCTURES DE L'ONDE DE CHOC

En théorie cinétique le problème de la structure d'une onde de choc est très actuel, aussi est-il naturel d'étudier ce problème pour un modèle de gaz à répartition discrète de vitesses. La première étude a été faite par Broadwell [2] le modèle utilisé étant le modèle spatial à 6 vitesses rappelé en (I-§ E-1). Récemment Godunov et Sultangazin [21] avec ce même modèle ont comparé numériquement les structures obtenues à partir des équations cinétiques exactes et à partir d'équations avec viscosité. Nous avons, nous aussi, fait cette étude comparative mais analytiquement et pour le modèle à 6 vitesses présenté ici; nous nous limitons aux ondes de choc de compression avec $\xi \in]\xi_1^{(1)}, 1[$.

1 - La structure de l'onde de choc à partir des équations cinétiques exactes.

Afin d'être plus clair on réintroduit la vitesse c dans (60) que l'on avait prise égale à 1 dans le paragraphe E. La vitesse de déplacement du choc est désormais ξc. On a avec $\eta = x - \xi c t$:

$$(81) \qquad \begin{cases} \dfrac{dn}{d\eta} = -\dfrac{B}{3c}\,\xi\,(n - n^{(1)})\,(n^{(2)} - n) \\ n^{(2)} = n^{(1)} - \dfrac{1}{\xi(1-\xi^2)(1-4\xi^2)}\,H^{(1)}(\xi) \ . \end{cases}$$

Variables sans dimension

Soit n_o la densité totale du gaz dans un état de référence. On suppose de plus que ce gaz est tel que $N_i = \frac{n_o}{6}$ pour $i = 0, 1, \ldots, 5$. Dans ces conditions on peut calculer le libre parcours moyen ; d'après (II-(9)) :

$$\lambda = \frac{p}{n_o} \frac{\sum_i |\vec{u}_i|}{\sum_{i,j} \sum_{(k,l)} A_{ij}^{kl}} = \frac{6}{n_o} \frac{6c}{2cS.6} = \frac{6c}{n_o B}$$

car $B = 2cS$ et car, (I-(4)), $A_{ij}^{kl} = 2cS\ \alpha_{ij}^{kl}$ avec $\alpha_i^{k\ k+3}_{\ i+3} = \frac{1}{3}$ pour tout i et tout k, et $\alpha_{ij}^{kl} = 0$ dans les autres cas.

On pose :

$$\bar{\eta} = \frac{\eta}{\lambda} \quad , \quad \bar{n} = \frac{n}{n_o} \quad , \quad \bar{N}_i = \frac{N_i}{n_o} \text{ pour } i = 0, 1, \ldots, 5,$$

$$\bar{H}^{(1)}(\xi) = \frac{H^{(1)}(\xi)}{n_o}$$

d'où :

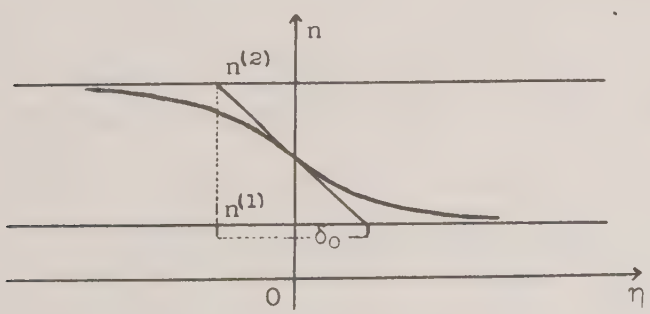
$$\frac{d\bar{n}}{d\bar{\eta}} = -2\xi (\bar{n} - \bar{n}^{(1)})(\bar{n}^{(2)} - \bar{n}).$$

L'intégration de cette équation donne une expression analogue à (61). Avec $\eta_o = 0$ on remarque que le profil de l'onde de choc pour la densité est symétrique par rapport au point $\eta = 0$, $\bar{n} = \frac{1}{2}(\bar{n}^{(1)} + \bar{n}^{(2)})$.

On définit l'épaisseur du choc par la formule classique de Prandlt

$$(82) \quad \delta_o = \frac{|n^{(2)} - n^{(1)}|}{\text{Max}\left|\frac{dn}{d\eta}\right|} = \frac{|\bar{n}^{(2)} - \bar{n}^{(1)}|}{\text{Max}\left|\frac{d\bar{n}}{d\bar{\eta}}\right|}\lambda = \left|\frac{(1-\xi^2)(1-4\xi^2)}{2\xi\ \bar{H}^{(1)}(\xi)}\right| \lambda \quad .$$

δ_o est de l'ordre du libre parcours moyen pour ξ fixé différent des racines de $\bar{H}^{(1)}(\xi) = 0$ correspondant aux vitesses de déplacement des ondes de choc infiniment faibles.



$$n = \frac{n^{(1)} + n^{(2)} \exp\left\{-2\xi \frac{\lambda}{n_o}(n^{(2)} - n^{(1)})\eta\right\}}{1 + \exp\left\{-2\xi \frac{\lambda}{n_o}(n^{(2)} - n^{(1)})\eta\right\}}$$

2 - Etude comparative des structures obtenues à partir des équations cinétiques exactes et à partir des équations de Navier-Stokes.

On va étudier les structures de choc pour la densité n; à partir des équations exactes cette structure est donnée par l'équation différentielle (60) et à partir des équations de Navier-Stokes par l'équation différentielle (68). Cette dernière équation est très compliquée aussi ne va-t-on l'étudier que dans le cas particulier où $N_i^{(1)} = \frac{1}{6} n^{(1)}$ pour tout $i = 0,1,\ldots,5$.

Dans ces conditions d'après (38), (50), (60) et (52) on a :

$$u^{(1)} = \delta^{(1)} = X^{(1)} = 0, \quad \omega_1^{(1)} = -\omega_4^{(1)} = \frac{2}{3}, \quad \omega_2^{(1)} = \omega_3^{(1)} = 0$$

$$(83) \qquad n^{(2)} = n^{(1)} - \frac{2(2\xi^2 - 1)}{(1 - \xi^2)(1 - 4\xi^2)} n^{(1)}, \qquad \xi_2^{(1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Les formules (67) donnent $B^{(1)}(\xi) = -n^{(1)} \xi(5\xi^2 - 2)$, $C^{(1)}(\xi) = (n^{(1)})^2 \xi(5\xi^2 - 2)$, $D^{(1)}(\xi) = 0$, $b^{(1)}(\xi) = -n^{(1)} \xi$, $d^{(1)}(\xi) = n^{(1)}(2\xi^2 - 1)$ si bien que les équations (68) et (69) s'écrivent :

$$(84) \begin{cases} \frac{dn}{d\eta} = -\frac{2B}{3} \xi \frac{(1 - \xi^2)(1 - 4\xi^2)[n(1 - X)]^3 (n^{(1)} - n)(n - n^{(2)})}{n^{(1)}[n(X - 1) - 2\xi^2 n + n^{(1)}(2\xi^2 - 1)][2\xi^2 n(X - 1) + n(5\xi^2 - 1)]} \\ n(1 - X) = n^2(5\xi^2 - 1) - 2n n^{(1)}(5\xi^2 - 2) + (n^{(1)})^2 (5\xi^2 - 2). \end{cases}$$

a) Introduction de $\mathcal{D}$

Tous les profils obtenus à partir de l'équation (83) sont identiques à une translation parallèle à l'axe des x près; il en est de même pour les profils obtenus à partir de l'équation (60). Dans le but de comparer ces profils on étudie :

$$\left(\frac{dn}{d\eta}\right)_{N.S.} - \left(\frac{dn}{d\eta}\right)_{ex.} = -\frac{B}{3} \xi (n - n^{(1)})(n^{(2)} - n) \frac{\mathcal{D}}{n^{(1)}[n(X-1) - 2\xi^2 n + n^{(1)}(2\xi^2 - 1)][2\xi^2 n(X-1) + n(5\xi^2 - 1)]}$$

avec :

$$\mathcal{D} = 2(1-\xi^2)(1-4\xi^2)\, n^3(1-X)^3 - n^{(1)}[n(X-1) - 2\xi^2 n + n^{(1)}(2\xi^2 - 1)][2\xi^2 n(X-1) + n(5\xi^2 - 1)]$$

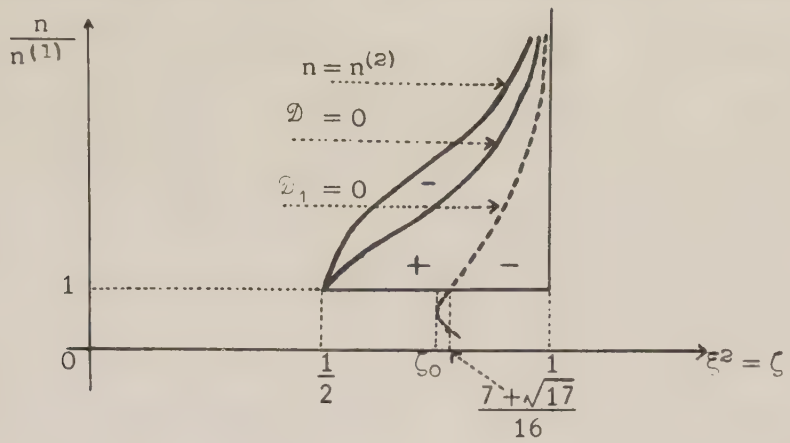
$n(1 - X)$ est donné en (84) :

$$\mathcal{D} = [n^2(5\xi^2 - 1) - 2n\, n^{(1)}(5\xi^2 - 2) + (n^{(1)})^2(5\xi^2 - 2)]^{\frac{1}{2}} \{2n^2(1-\xi^2)(1-4\xi^2)(5\xi^2 - 1)$$

$$(85) \qquad + n\, n^{(1)}(1-\xi^2)(1-4\xi^2)(-20\xi^2 + 7) + 2(n^{(1)})^2[(1-\xi^2)(1-4\xi^2)(5\xi^2 - 2) +$$

$$+ \xi^2(2\xi^2 - 1)]\} + (n^{(1)})^2[n(10\xi^4 - \xi^2 - 1) - 2\xi^2 n^{(1)}(5\xi^2 - 2)].$$

b) Etude du signe de $\mathcal{D}$ pour $\xi^2 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ et $n \in \left]n^{(1)}, n^{(2)}\right[$, (soit $(\xi^2, n) \in \Omega$).



On pose $\xi^2 = \zeta$ et on fait $n^{(1)} = 1$ ce qui revient à prendre $\frac{n}{n^{(1)}}$ comme variable. On vérifie que sur Ω :

$$\mathcal{D}(\zeta, 1) = 4\zeta(2\zeta - 1) > 0$$

$$\mathcal{D}(\zeta, n^{(2)}) = \frac{4(2\zeta - 1)(-4\zeta^2 - \zeta + 1)(4\zeta^3 + 11\zeta^2 - 8\zeta + 1)}{(4\zeta^2 - 5\zeta + 1)^2} < 0.$$

Dans $\mathcal{D}$ on distingue 3 groupements aussi on écrira $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0\, \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$.

b_1) $\mathcal{D}_2 = n(10\zeta^2 - \zeta - 1) - 10\zeta^2 + 4\zeta$ est pour $\zeta \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ une fonction monotone croissante de n; $\mathcal{D}_2$ est donc toujours positif car $\mathcal{D}_2(1, \zeta) > 0$.

$\mathcal{D}_1 = (1 - \zeta)(1 - 4\zeta)[2n^2(5\zeta - 1) + n(-20\zeta + 7) + 2(5\zeta - 1)] + 2\zeta(2\zeta - 1)$ est un trinôme du second degré en n. $\mathcal{D}_1(\zeta, 1) = 8\zeta^2 - 7\zeta + 1$ est négatif pour $\zeta \in \left]\frac{1}{2}, \frac{7+\sqrt{17}}{16}\right[$ et positif sur $\left]\frac{7+\sqrt{17}}{16}, 1\right[$.

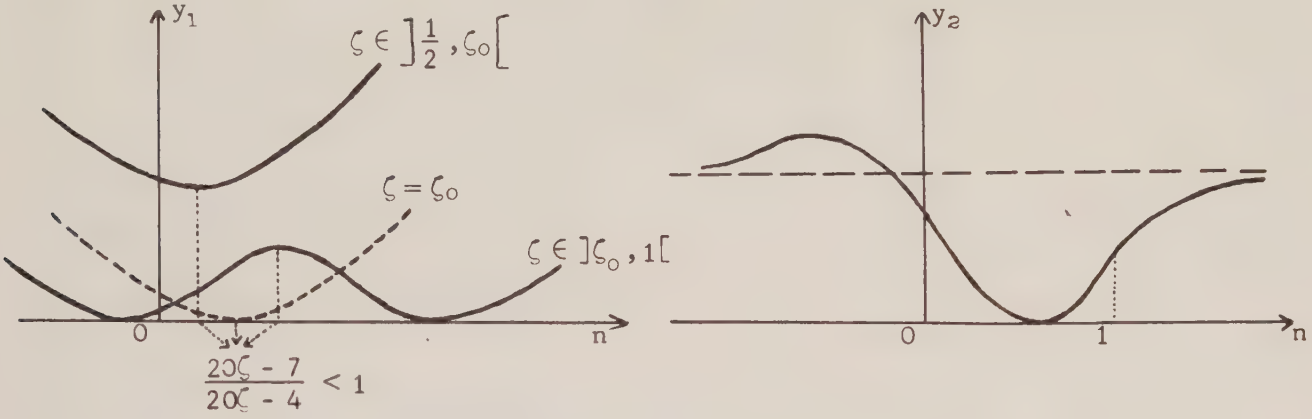
$\mathcal{D}_1(\zeta, n^{(2)}) = \frac{32\zeta^4 + 44\zeta^3 - 61\zeta^2 + 18\zeta - 1}{4\zeta^2 - 5\zeta + 1}$ est négatif pour $\zeta \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

Par ailleurs 1 et $n^{(2)}$ sont tous deux supérieurs à $\frac{20\zeta - 7}{4(5\zeta - 1)}$. De ces remarques on déduit le tracé de la courbe d'équation $\mathcal{D}_1 = 0$ à l'intérieur du domaine Ω. Dans la région adjacente à la droite $\zeta = 1$, $\mathcal{D}_1$ est positif.

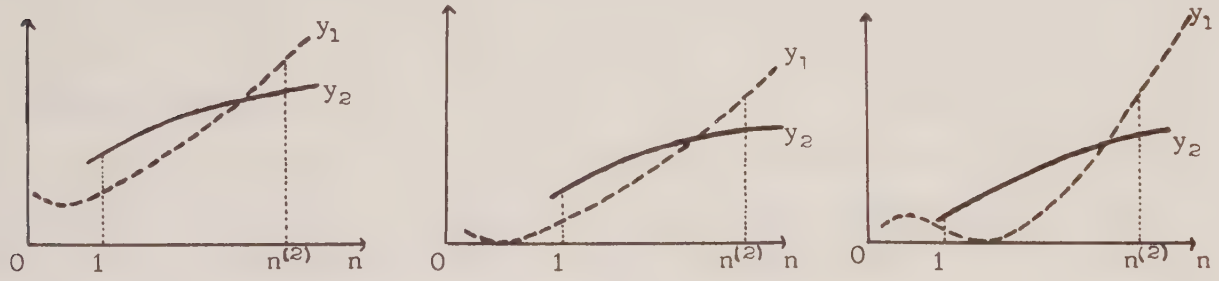
Dans la région où $\mathcal{D}_1$ est positif, $\mathcal{D}$ est positif mais dans la région où $\mathcal{D}_1$ est négatif le problème n'est pas résolu; le signe de $\mathcal{D}$ est alors celui de $\mathcal{D}_2^2\, \mathcal{D}_0^{-2} - \mathcal{D}_1^2$.

b_2) On va construire les courbes représentatives des fonctions de la variable n, $y_2 = \mathcal{D}_2^2\, \mathcal{D}_0^{-2}$ et $y_1 = \mathcal{D}_1^2$, ζ étant un paramètre. $y_1 = \mathcal{D}_1^2$ est de la forme $y_1 = (d_2' n^2 + d_1' n + d_0')^2$. L'étude précédente de $\mathcal{D}_1$ permet le tracé des courbes représentatives de $y_1 = \mathcal{D}_1^2$. On appelle ζ_0, $\zeta_0 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$, l'abscisse du point à tangente verticale de la courbe $\mathcal{D}_1(\zeta, n) = 0$.

$y_2 = \mathcal{D}_2^2\ \mathcal{D}_0^{-2}$ est de la forme $y_2 = (d_1'' n + d_0'')^2 (d_2 n^2 + d_1 n + d_0)^{-1}$. On a $y_2' = (d_1'' n + d_0'')(d_2 n^2 + d_1 n + d_0)^{-2}\ 2(5\zeta - 2)[(-\zeta + 1)n + 3\zeta - 1]$. 1 et $n^{(2)}$ sont supérieures à l'abscisse du minimum de y_2. Par ailleurs pour $n = 1$ $y_2'' = 2(\zeta - 1)(100\zeta^3 - 85\zeta^2 + 23\zeta - 2)$ est toujours positif. La courbe représentative de y_2 est concave pour $n \in [1, n^{(2)}]$



b_3) En utilisant les résultats obtenus précédemment notamment que la courbe représentative de y_2 est concave sur $[1, n^{(2)}]$, et en utilisant le fait qu'en $n = n^{(2)}$, $y_2 - y_1$ est négatif (car $\mathcal{D}(\zeta, n^{(2)}) < 0$) et qu'en $n = 1$, $y_2 - y_1$ est positif (car $y_2 - y_1 = -8\zeta(2\zeta - 1)(1 - 4\zeta)(1 - \zeta) > 0$) on a :



Il résulte de cette étude que $\mathcal{D}(\zeta, n) = 0$ a au plus une racine en n le paramètre ζ étant fixé; par ailleurs $\mathcal{D}(\zeta, n)$ a au moins une racine en n car on a vu que $\mathcal{D}(\zeta, 1)$ et $\mathcal{D}(\zeta, n^{(2)})$ sont de signes contraires.

Conclusion. $\mathcal{D}(\zeta, n) = 0$ sépare le domaine Ω en 2 régions, l'une adjacente à $n = n^{(2)}$ où $\mathcal{D}$ est négatif, l'autre adjacente à $n = 1$ et $\zeta = 1$ où $\mathcal{D}$ est positif.

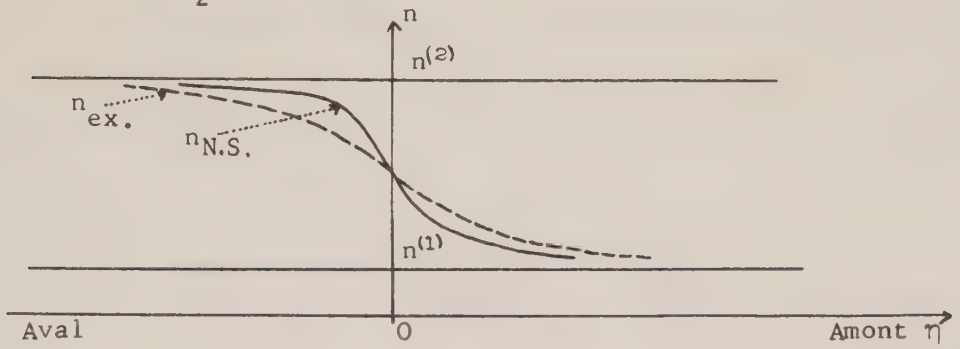
c) Conséquence pour les profils de l'onde de choc

D'après le résultat général de $\left(\frac{dn}{d\eta}\right)_{N.S.}$ donné en (76), pour $\xi \in \left]\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right[$ $\left(\frac{dn}{d\eta}\right)_{N.S.}$ est négatif et le dénominateur figurant au second membre de (84) est

aussi négatif. $(\frac{dn}{d\eta})_{NS} - (\frac{dn}{d\eta})_{ex.}$ est donc du signe de $\mathcal{D}$.

On montre que pour $\zeta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et pour $n = \frac{1+n^{(2)}}{2} = \frac{4\zeta^2 - 7\zeta + 2}{(1-\zeta)(1-4\zeta)} = 2$ on a $\mathcal{D} < 0$. D'ailleurs on doit pouvoir établir que $\mathcal{D}(\zeta, \frac{1+n^{(2)}}{2}) < 0$ pour tout $\zeta \in]\frac{1}{2}, 1[$.

L'étude du signe de $\mathcal{D}$ permet un tracé approximatif du profil de la densité n donné par les équations de Navier-Stokes. $(\frac{dn}{d\eta})_{N.S.} - (\frac{dn}{d\eta})_{ex.}$ est positif dans la région amont c'est à dire pour n voisin de $n^{(1)}$, et est négatif dans la région aval c'est à dire pour n voisin de $n^{(2)}$. Plaçons le point d'ordonnée $n = \frac{n^{(1)}+n^{(2)}}{2}$ en $\eta = 0$:



Le profil de l'onde de choc pour la densité obtenu à partir des équations de Navier-Stokes n'est pas symétrique par rapport au point $(0, \frac{n^{(1)}+n^{(2)}}{2})$ contrairement à celui obtenu à partir des équations cinétiques exactes.

L'épaisseur de l'onde de choc pour la densité obtenue à partir des équations de Navier-Stokes est :

$$(86) \qquad \delta_{N.S.} = \frac{|n^{(2)} - n^{(1)}|}{\text{Max}\left|\frac{dn}{d\eta}\right|_{N.S.}} < \frac{|n^{(2)} - n^{(1)}|}{\left|\frac{dn}{d\eta}(0)\right|_{N.S.}} < \frac{|n^{(2)} - n^{(1)}|}{\left|\frac{dn}{d\eta}(0)\right|_{ex.}} = \delta_0$$

$\frac{dn}{d\eta}(0)$ est la valeur de $\frac{dn}{d\eta}$ au point $\eta = 0$.

Conclusion. L'épaisseur de l'onde de choc pour la densité obtenue à partir des équations de Navier-Stokes est plus petite que l'épaisseur obtenue à partir des équations cinétiques exactes.

3 - Etude comparative des structures obtenues à partir des équation cinétiques exactes en tenant compte ou non des collisions ternaires.

Un essai pour voir l'influence des collisions ternaires sur la structure de l'onde de choc est tenté. On se limite seulement aux collisions ternaires qui peuvent s'obtenir comme une suite très rapide de collisions binaires, ce que l'on envisage parfois en théorie cinétique classique [41]. On ne retient donc que les collisions ternaires de type B, les collisions ternaires de type C et D_s sont supposées ne pas exister.

On fait toujours l'hypothèse d'équiprobabilité; les équations cinétiques exactes en l'absence des collisions ternaires sont les équations (1) et en tenant compte des collisions ternaires elles s'écrivent d'après (I-(52))

$$(87)\qquad \frac{\partial N_i}{\partial t} + \vec{u}_i \cdot \vec{\nabla} N_i = \frac{1}{3}\left(B + (T_B - T'_B)\sum_k N_k\right)(N_{i+1}N_{i+4} + N_{i+2}N_{i+5} - 2N_i N_{i+3}).$$

On se place dans les mêmes conditions que dans le paragraphe E-1. Les équations cinétiques exactes qui en l'absence de collisions ternaires sont (37) s'écrivent en tenant compte des collisions ternaires :

$$(88)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial N_0}{\partial t} + \dfrac{\partial N_0}{\partial x} = \dfrac{2}{3}\left(B + (T_B - T'_B)n\right)(N_1 N_2 - N_0 N_3) \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial N_1}{\partial x} = \dfrac{1}{3}\left(B + (T_B - T'_B)n\right)(N_0 N_3 - N_1 N_2) \\ \dfrac{\partial N_2}{\partial t} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial N_2}{\partial x} = \dfrac{1}{3}\left(B + (T_B - T'_B)n\right)(N_0 N_3 - N_1 N_2) \\ \dfrac{\partial N_3}{\partial t} - \dfrac{\partial N_3}{\partial x} = \dfrac{2}{3}\left(B + (T_B - T'_B)n\right)(N_1 N_2 - N_0 N_3) \end{cases}.$$

Il est évident que deux états 1 et 2 vérifiant les conditions de choc (47) sont reliables par une courbe intégrale solution de (37) aussi bien que par une courbe intégrale solution de (88).

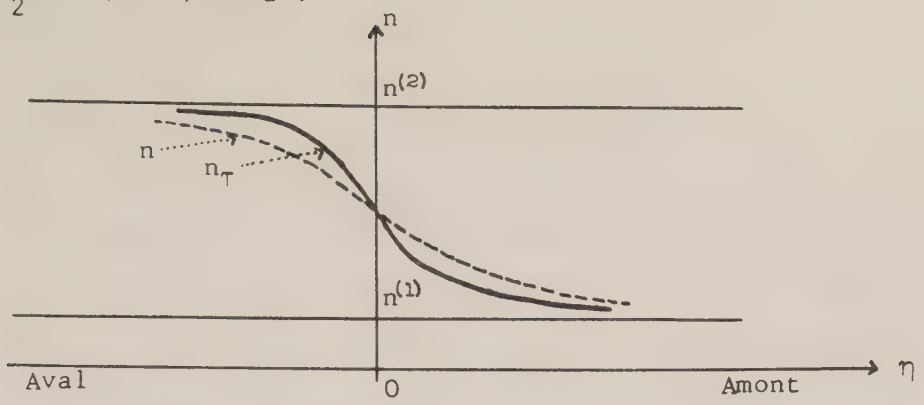
On s'intéresse comme précédemment à la variation de n en fonction de $\eta = x - \xi t$. On pose $\tau = \dfrac{T_B - T'_B}{B}$; $\left(\dfrac{dn}{d\eta}\right)_\tau$ et $\left(\dfrac{dn}{d\eta}\right)_0$ représentent respectivement $\dfrac{dn}{d\eta}$ en tenant compte des collisions ternaires et en n'en tenant pas compte

$$\left(\frac{dn}{d\eta}\right)_0 = -\frac{B}{3}\xi\,(n - n^{(1)})(n^{(2)} - n)$$

$$\left(\frac{dn}{d\eta}\right)_\tau = -\frac{B}{3}\xi(1+\tau n)\,(n - n^{(1)})(n^{(2)} - n)$$

$\left(\dfrac{dn}{d\eta}\right)_\tau - \left(\dfrac{dn}{d\eta}\right)_0$ est négatif (τ est positif). On suppose qu'en $\eta = 0$

$n = \frac{1}{2}(n^{(1)} + n^{(2)})$ d'où :



Le profil de l'onde de choc pour la densité obtenu en tenant compte des collisions ternaires n'est pas symétrique par rapport au point $(0, \frac{n^{(1)} + n^{(2)}}{2})$ contrairement à celui obtenu en l'absence de collisions ternaires.

L'épaisseur du nouveau profil obtenu est :

$$\delta_\tau = \frac{|n^{(2)} - n^{(1)}|}{\text{Max}\left|\frac{dn}{d\eta}\right|_\tau} < \frac{|n^{(2)} - n^{(1)}|}{\left|\frac{dn}{d\eta}(o)\right|_\tau} < \frac{|n^{(2)} - n^{(1)}|}{\left|\frac{dn}{d\eta}(o)\right|_o} = \delta_o$$

τ étant petit on voit que $\left|\frac{dn}{d\eta}\right|_\tau$ est maximum en $n = \frac{n^{(1)} + n^{(2)}}{2} +$

$+ \frac{3}{8}\tau (n^{(1)} - n^{(2)})^2 + o(\tau)$, ce maximum étant $\left|\frac{dn}{d\tau}\right|_o (1 + \tau \frac{n^{(1)} + n^{(2)}}{2}) + o(\tau)$

d'où :

$$(89) \qquad \delta_\tau = \delta_o (1 - \tau \frac{n^{(1)} + n^{(2)}}{2}) + o(\tau).$$

Conclusion. Le profil de l'onde de choc obtenu en tenant compte des collisions ternaires a une épaisseur plus faible que celui obtenu en l'absence de collisions ternaires.

4 - Analyse des résultats.

En théorie cinétique classique de nombreux auteurs ont étudié le problème de la structure d'une onde de choc; nous mentionnons quelques travaux très différents où est faite une étude comparative des structures pour la densité obtenues à partir des équations de Navier-Stokes et à partir de certains traitements de l'équation de Boltzmann.

Bird [1] pour étudier l'onde de choc pour la densité met en œuvre une expérience numérique sur un calculateur à grande vitesse en utilisant un gaz constitué de sphères élastiques. Schultz - Grunow et Frohn [40] expérimentalement ont mesuré les profils de densité des ondes de choc dans un gaz constitué d'argon ou d'hélium. Chahine et Narasimha [8] obtiennent une solution numérique exacte de l'équation modèle de Krook pour l'écoulement à travers une onde de choc. Holway [32] indique notamment les épaisseurs de l'onde de choc pour la densité obtenues par la méthode de Mott-Smith ou par la méthode des fonctions de distribution ellipsoïdales (E.D.F. method) appliquées à l'équation de Boltzmann dans le cas des molécules maxwelliennes.

Dans toutes ces études on constate que le profil de l'onde de choc pour la densité obtenu à partir des équations de Navier-Stokes est le plus redressé. L'épaisseur de l'onde de choc pour la densité obtenue à partir des équations de Navier Stokes est plus faible que celle obtenue par toute autre méthode à partir de la théorie cinétique. Les résultats trouvés ici dans le paragraphe K-3 sont d'un point de vue qualitatif conformes aux résultats trouvés par ces différents auteurs.

Cependant nos résultats sont en contradiction avec les résultats de Godunov et Sultangazin [21]; ces auteurs ont modifié légèrement les équations cinétiques correspondant au modèle spatial à six vitesses de Broadwell [2] et ont étudié numériquement les structures d'une onde de choc obtenues à partir des équations exactes et à partir des équations de Navier Stokes appropriées. Ils mettent ainsi en évidence le fait que les deux structures sont essentiellement différentes mais l'épaisseur de la structure de choc obtenue à partir des équations cinétiques est ici inférieure à l'épaisseur obtenue à partir des équations de Navier-Stokes.

APPENDICE I

Calcul d'un déterminant

Soit dans $\mathbb{R}^p$ une base orthonormée dans laquelle on distingue les q premiers vecteurs des $p-q$ suivants : $V_1, \ldots, V_q, W_{q+1}, \ldots, W_p$, $(0 < q < p)$. La $i^{\text{ème}}$ composante de V_α ou de W_β est notée $V_{\alpha i}$ ou $W_{\beta i}$.

Soit le système linéaire de p équations pour les p inconnues $x_1, \ldots, x_p$.

$$(1) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{p} x_i \, c_i \, V_{\alpha i} = \lambda_\alpha & \alpha = 1, \ldots, q \\ \sum_{i=1}^{p} x_i \, \frac{1}{c_i} \, W_{\beta i} = \mu_\beta & \beta = q+1, \ldots, p \, . \end{cases}$$

Notations

$(j_1, j_2, \ldots, j_r)$ désigne une combinaison sans répétition de r nombres pris parmi $1, 2, \ldots, p$.

$D_{j_1 j_2 \cdots j_r}(U_1, \ldots, U_r)$ est le déterminant d'ordre r extrait du tableau des composantes de $U_1, \ldots, U_r$, les composantes indexées par $j_1, j_2, \ldots, j_r$ étant seules conservées.

Théorème. Le déterminant Δ du système (1) est tel que :

$$(2) \quad \Delta^2 = \left\{ \sum_{(j_1, \ldots, j_q)} (c_{j_1} \cdots c_{j_q})^2 \left[D_{j_1 \ldots j_q}(V_1, \ldots, V_q) \right]^2 \right\} \cdot \left\{ \sum_{(j_1, \ldots, j_{p-q})} (c_{j_1} \cdots c_{j_{p-q}})^{-2} \left[D_{j_1, \ldots, j_{p-q}}(W_{q+1}, \ldots, W_p) \right]^2 \right\}$$

les sommations sont étendues à toutes les combinaisons $(j_1, \ldots, j_q)$ et $(j_1, \ldots, j_{p-q})$.

Lemme. Soient $U_1, \ldots, U_r$, r vecteurs de $\mathbb{R}^p$ $(r \leq p)$. Le déterminant D d'ordre r dont l'élément de la $\alpha^{\text{ième}}$ ligne et de la $\beta^{\text{ième}}$ colonne est $(3) \sum_{i=1}^{p} d_i \, U_{\alpha i} U_{\beta i}$ vaut : $D = \sum_{(j_1, \ldots, j_r)} d_{j_1} \cdots d_{j_r} \left[D_{j_1 \ldots j_r}(U_1, \ldots, U_r) \right]^2$

En effet on peut décomposer chaque colonne de D en p colonnes et écrire :

$$D = \sum_{((j_1, j_2, \cdots, j_r))} \begin{vmatrix} U_{1j_1} U_{1j_1} d_{j_1} & U_{2j_2} U_{1j_2} d_{j_2} & \cdots & U_{rj_r} U_{1j_r} d_{j_r} \\ U_{1j_1} U_{2j_1} d_{j_1} & U_{2j_2} U_{2j_2} d_{j_2} & \cdots & U_{rj_r} U_{2j_r} d_{j_r} \\ \cdots\cdots & & & \\ U_{1j_1} U_{rj_1} d_{j_1} & U_{2j_2} U_{rj_2} d_{j_2} & \cdots & U_{rj_r} U_{rj_r} d_{j_r} \end{vmatrix}$$

La sommation est étendue à tous les arrangements avec répétition de r nombres $j_1, j_2, \ldots, j_r$ pris parmi $1, 2, \ldots, p$. On peut réduire de manière évidente cette sommation à tous les arrangements sans répétition de r nombres $j_1, j_2, \ldots, j_r$ pris parmi $1, 2, \ldots, p$. D'où :

$$D = \sum_{\substack{((j_1, j_2, \cdots, j_r)) \\ \text{arrangement} \\ \text{sans répétition}}} (d_{j_1} d_{j_2} \cdots d_{j_r})(U_{1j_1} U_{2j_2} \cdots U_{rj_r}) D_{j_1 j_2 \cdots j_r}(U_1, U_2, \ldots, U_r)$$

soit

$$D = \sum_{(j_1, j_2, \cdots, j_r)} (d_{j_1} d_{j_2} \cdots d_{j_r}) \sum_{\substack{((h_1, h_2, \cdots, h_r)) \\ \text{permutation} \\ \text{des r nombres} \\ j_1, j_2, \ldots, j_r}} (U_{1h_1} U_{2h_2} \cdots U_{rh_r}) D_{h_1 h_2 \cdots h_r}(U_1, U_2, \ldots, U_r).$$

Mais $D_{h_1 h_2 \cdots h_r}(U_1, U_2, \ldots, U_r) = \varepsilon^{h_1 h_2 \cdots h_r}_{j_1 j_2 \cdots j_r} D_{j_1 j_2 \cdots j_r}(U_1, U_2, \ldots, U_r)$

avec $\varepsilon^{h_1 h_2 \cdots h_r}_{j_1 j_2 \cdots j_r}$ égal à $+1$ ou à -1 suivant que la permutation $h_1, h_2 \ldots h_r$ a la même signature que $j_1 j_2 \ldots j_r$ ou est de signature contraire. D'où :

$$D = \sum_{(j_1, j_2, \cdots, j_r)} (d_{j_1} d_{j_2} \cdots d_{j_r}) D_{j_1 j_2 \cdots j_r}(U_1, U_2, \ldots, U_r) \cdot \left(\sum_{\substack{((h_1, h_2, \cdots, h_r)) \\ \text{permutation} \\ \text{des r nombres} \\ j_1, j_2, \ldots, j_r}} \varepsilon^{h_1 h_2 \cdots h_r}_{j_1 j_2 \cdots j_r} U_{1h_1} U_{2h_2} \cdots U_{rh_r} \right).$$

On reconnaît dans la parenthèse la décomposition du déterminant d'ordre r $D_{j_1 j_2 \cdots j_r}(U_1, U_2, \ldots, U_r)$. La formule (3) est donc établie.

Démonstration du théorème. On appelle $\mathbf{Z}$ la matrice du système (1) et on considère la matrice transposée $\mathbf{Z}^T$:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} c_1 V_{11} & c_2 V_{12} & \cdots & c_p V_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 V_{q1} & c_2 V_{q2} & \cdots & c_p V_{qp} \\ \frac{1}{c_1} W_{q+1\,1} & \frac{1}{c_2} W_{q+1\,2} & \cdots & \frac{1}{c_p} W_{q+1\,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{c_1} W_{p1} & \frac{1}{c_2} W_{p2} & \cdots & \frac{1}{c_p} W_{pp} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z}^T = \begin{pmatrix} c_1 V_{11} & \cdots & c_1 V_{p1} & \frac{1}{c_1} W_{p+1\,1} & \cdots & \frac{1}{c_1} W_{p1} \\ c_2 V_{12} & \cdots & c_2 V_{q2} & \frac{1}{c_2} W_{q+1\,2} & \cdots & \frac{1}{c_2} W_{p2} \\ c_3 V_{13} & \cdots & c_3 V_{q3} & \frac{1}{c_3} W_{q+1\,3} & \cdots & \frac{1}{c_3} W_{p3} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ c_p V_{1p} & & c_p V_{qp} & \frac{1}{c_p} W_{q+1} & \cdots & \frac{1}{c_p} W_{p\,p} \end{pmatrix}$$

On calcule le produit $\mathbf{Z}\,\mathbf{Z}^T$; cette matrice produit à la forme

$$\mathbf{Z}\,\mathbf{Z}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_q & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}_{p-q} \end{pmatrix}$$

où $\mathbf{Z}_q$ et $\mathbf{Z}_{p-q}$ sont des matrices d'ordre q et $p-q$, symétriques, dont les éléments de la $\alpha^{\text{ième}}$ ligne et de la $\beta^{\text{ième}}$ colonne sont respectivement

$$\sum_i c_i^2 \; V_{\alpha i} V_{\beta i} \qquad \text{et} \qquad \sum_i \frac{1}{c_i^2} \; W_{\alpha i} \; W_{\beta i} \; .$$

Les déterminants de ces matrices sont donnés dans le lemme. Comme

$$\text{dét}(\mathbf{Z}\,\mathbf{Z}^T) = (\text{dét}\,\mathbf{Z}_q)(\text{dét}\,\mathbf{Z}_{p-q})$$

la formule (2) est établie.

APPENDICE II

Sur la résolution d'un système de p équations à p inconnues

Théorème 1.

Soient $A_1, \ldots, A_q, B_{q+1}, \ldots, B_p$ p vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^p$ tels que les sous espaces engendrés par $A_1, \ldots, A_q$ d'une part et $B_{q+1}, \ldots, B_p$ d'autre part soient orthogonaux, la ième composante de A_α et B_β étant notée a_i^α et b_i^β. On considère le système de p équations pour les p inconnues $x_1, \ldots, x_p$ suivant :

$$(1) \quad \begin{cases} a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \ldots + a_p^1 x_p = c_1 \\ - - - - - - \\ a_1^q x_1 + a_2^q x_2 + \ldots + a_p^q x_p = c_q \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} b_1^{q+1} \operatorname{Log} x_1 + b_2^{q+1} \operatorname{Log} x_2 + \ldots + b_p^{q+1} \operatorname{Log} x_p = d_{q+1} \\ - - - - - - - \\ b_1^p \operatorname{Log} x_1 + b_2^p \operatorname{Log} x_2 + \ldots + b_p^p \operatorname{Log} x_p = d_p \end{cases}$$

Si le système (1) des q premières équations admet une solution strictement positive (c'est à dire $x_i > 0$ pour $i = 1, \ldots, p$) alors le système complet (1)(2) admet une solution et une seule strictement positive.

De plus cette solution est une fonction continue et indéfiniment dérivable des paramètres $c_1, \ldots, c_q, d_{q+1}, \ldots, d_p$.

Les cas $q = 0$ et $q = p$ sont triviaux; on suppose désormais $0 < q < p$

$\mathbb{R}_+^p$ désigne le domaine $x_i \geqslant 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, p$.

1 - Etude des variétés linéaires affines qui rencontrent $\mathbb{R}_+^p$.

Proposition 1. Un hyperplan H d'équation

$$H \equiv a_1 x_1 + \ldots + a_p x_p - c = 0$$

rencontre $\mathbb{R}_+^p$ si ou bien les $a_1, \ldots, a_p$ ne sont pas tous de même signe, ou bien, si les $a_1, \ldots, a_p$ sont tous de même signe (au sens large), alors c a ce signe.

Dans ce dernier cas, si $c = 0$ l'hyperplan H ne contient que des points de la frontière de $\mathbb{R}_+^p$.

a) Supposons les $a_1, \ldots, a_p$ non tous de même signe. Il existe deux coefficients l'un strictement positif, l'autre strictement négatif, par exemple $a_1 > 0$ et $a_2 < 0$. Soient $x_3, \ldots, x_p$ positifs, il est toujours possible de choisir x_2 positif tel que $c - (a_3x_3 + \ldots + a_p x_p) - a_2x_2$ soit positif. Ensuite il existe x_1 positif tel que $a_1 x_1 = c - (a_3 x_3 + \ldots + a_p x_p) - a_2 x_2$. Dans ce cas H rencontre donc $\mathbb{R}_+^p$.

b) Supposons les $a_1, \ldots, a_p$ tous positifs ou nuls mais non tous nuls. Quand $(x_1, \ldots, x_p)$ décrit $\mathbb{R}_+^p$, $a_1 x_1 + \ldots + a_p x_p$ demeure positif et prend toute valeur entre 0 et $+\infty$. Donc :

si $c < 0$ il n'y a aucun point de H dans $\mathbb{R}_+^p$

si $c = 0$ il n'y a que des points frontières de $\mathbb{R}_+^p$ dans H c'est à dire des points tels que certains x_i soient nuls.

si $c > 0$ H contient des points intérieurs à $\mathbb{R}_+^p$ c'est à dire des points tels que tous les x_i soient strictement positifs.

Proposition 2. Soient r hyperplans $H_1, \ldots, H_r$ $(r \leqslant p)$ et soit Γ la variété linéaire affine de dimension $p - r$ définie par
$\Gamma = H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_r$.

Si Γ rencontre $\mathbb{R}_+^p$ alors tout hyperplan H du faisceau défini par les hyperplans $H_1, \ldots, H_r$, $H = k_1 H_1 + \ldots + k_r H_r$, rencontre $\mathbb{R}_+^p$.

Cette proposition est évidente car tout hyperplan H du faisceau contient Γ.

On pose $H_i = a_1^i x_1 + \ldots + a_p^i x_p - c_i$, $i = 1, \ldots, r$ et on suppose les r vecteurs $A_i = (a_1^i, \ldots, a_p^i)$, $i = 1, \ldots, r$, linéairement indépendants. L'équation de l'hyperplan H est :

$$(k_1 a_1^1 + \ldots + k_r a_1^r) x_1 + \ldots + (k_1 a_p^1 + \ldots + k_p a_p^r) x_p - (k_1 c_1 + \ldots + k_r c_r) = 0.$$

Utilisant la proposition 1 on a le résultat suivant :

Corollaire : si la variété linéaire affine Γ rencontre $\mathbb{R}_+^p$ et s'il existe r nombres tels que les p combinaisons :

$(k_1 a_1^1 + \ldots + k_r a_1^r)$, ... , $(k_1 a_p^1 + \ldots + k_r a_p^r)$ soient de même signe au sens large, alors $(k_1 c_1 + \ldots + k_r c_r)$ a ce signe. Si de plus Γ contient des points intérieurs à $\mathbb{R}_+^p$ alors $k_1 c_1 + \ldots + k_r c_r$ a ce signe strictement (car les p combinaisons définies ci-dessus ne sont pas toutes nulles).

Proposition 3. Si la variété $\Gamma = H_1 \cap \ldots \cap H_r$ rencontre $\mathbb{R}_+^p$, toute sur-variété obtenue en prenant l'intersection d'un certain nombre des hyperplans $H_1, \ldots, H_r$ contient Γ et par suite rencontre $\mathbb{R}_+^p$.
Cette proposition est évidente mais utile dans la suite.

2 - Transformation du problème.

Le système (2) de $p - q$ équations pour les p inconnues $\operatorname{Log} x_i$ est de rang $p - q$. $\operatorname{Log} \lambda_i$, $i = 1, \ldots, r$ en étant une solution particulière, la solution générale de (2) s'écrit :

$$\operatorname{Log} x_i = \mu_1 a_i^1 + \ldots + \mu_q a_i^q + \operatorname{Log} \lambda_i$$

car A_α est orthogonal à B_β pour tout $\alpha = 1, 2, \ldots, q$ et tout $\beta = q+1, \ldots, p$.

Les μ_i, $i = 1, \ldots, q$ sont des paramètres variant de $-\infty$ à $+\infty$.

$$x_i = \lambda_i \, e^{\mu_1 a_i^1 + \ldots + \mu_q a_i^q} .$$

Posons $\xi_j = e^{\mu_j}$, $j = 1, \ldots, q$, $\xi_j \in]0, \infty[$, d'où :

$$x_i = \lambda_i \, \xi_1^{a_i^1} \, \xi_2^{a_i^2} \ldots \xi_q^{a_i^q} \qquad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Démontrer le théorème 1 revient à démontrer le théorème 2 ou le théorème 3 suivants.

Théorème 2

Soient $A_1, \ldots, A_q$, $(0 < q < p)$ q vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^p$, A_α ayant pour composantes a_i^α, $i = 1, \ldots, p$. Soit la variété linéaire affine Γ de dimension $p - q$ définie par $\Gamma = H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_q$:

$$\Gamma \begin{cases} H_1 \equiv a_1^1 x_1 + \ldots + a_p^1 x_p - c_1 = 0 \\ - - - - \quad - - - \\ H_q \equiv a_1^q x_1 + \ldots + a_p^q x_p - c_q = 0 \end{cases}$$

et soit $\mathcal{C}$ la variété de dimension q définie paramètriquement par les équations :

$$x_1 = \lambda_1 \xi_1^{a_1^1} \dots \xi_q^{a_1^q}, \dots, x_p = \lambda_p \xi_1^{a_p^1} \dots \xi_q^{a_p^q},$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des nombres strictement positifs et où les paramètres $\xi_1, \dots, \xi_q$ varient de 0 à $+\infty$.

Alors si Γ rencontre l'intérieur de $\mathbb{R}_+^p$, Γ et $\mathcal{C}$ ont un point d'intersection à l'intérieur de $\mathbb{R}_+^p$ et un seul.

De plus les coordonnées de ce point d'intersection sont des fonctions continues et indéfiniment dérivables des paramètres $c_1, \dots, c_q$, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

Théorème 3

Si Γ rencontre l'intérieur de $\mathbb{R}_+^p$ et si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont strictement positifs, le système de q équations à q inconnues $\xi_1, \dots, \xi_q$ positives :

$$(3) \quad \begin{cases} a_1^1 \lambda_1 \xi_1^{a_1^1} \dots \xi_q^{a_1^q} + \dots + a_p^1 \lambda_p \xi_1^{a_p^1} \dots \xi_q^{a_p^q} - c_1 = 0 \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_1 \lambda_1 \xi_1^{a_1^1} \dots \xi_q^{a_1^q} + \dots + a_p^q \lambda_p \xi_1^{a_p^1} \dots \xi_q^{a_p^q} - c_q = 0 \end{cases}$$

a une solution et une seule. De plus cette solution est fonction continue et indéfiniment dérivable des paramètres $c_1, \dots, c_q$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

On peut toujours supposer que chaque vecteur A_α, $\alpha = 1, \dots, q$ a au moins une composante strictement positive quitte à changer A_α en $-A_\alpha$ et c_α en $-c_\alpha$.

3 - Démonstration de l'unicité.

Supposons qu'il existe deux solutions $\xi_1, \dots, \xi_q$ et $\xi_1', \dots, \xi_q'$ du système (3). Comme tous les ξ sont positifs, il existe q nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ tels que

$$\xi_1' = \xi_1 e^{\alpha_1}, \dots, \xi_q' = \xi_q e^{\alpha_q}$$

On a donc simultanément

$$\begin{cases} a_1^i \lambda_1 \xi_1^{a_1^1} \dots \xi_q^{a_1^q} + \dots + a_p^i \lambda_p \xi_1^{a_p^1} \dots \xi_q^{a_p^q} - c_i = 0 \\ a_1^i \lambda_1 \xi_1^{a_1^1} \dots \xi_q^{a_1^q} \, e^{\alpha_1 a_1^1 + \dots + \alpha_q a_1^q} + \dots + a_p^i \lambda_p \xi_1^{a_p^1} \dots \xi_q^{a_p^q} \, e^{\alpha_1 a_p^1 + \dots + \alpha_q a_p^q} - c_i = 0 \\ i = 1, 2, \dots, q. \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} a_1^i \lambda_1 \xi_1^{a_1^1} \ldots \xi_q^{a_1^q} (e^{\alpha_1 a_1^1 + \ldots + \alpha_q a_1^q} - 1) + \ldots + a_p^i \lambda_p \xi_1^{a_p^1} \ldots \xi_q^{a_p^q} (e^{\alpha_1 a_p^1 + \ldots + \alpha_q a_p^q} - 1) = 0 \\ \\ i = 1, 2, \ldots, q \ . \end{cases}$$

On multiplie la $i^{ème}$ équation obtenue par α_i et on somme pour $i = 1, \ldots, q$:

$$\lambda_1 \xi_1^{a_1^1} \ldots \xi_q^{a_1^q} (\alpha_1 a_1^1 + \ldots + \alpha_q a_1^q)(e^{\alpha_1 a_1^1 + \ldots + \alpha_q a_1^q} - 1) + \ldots$$

$$\ldots + \lambda_p \xi_1^{a_p^1} \ldots \xi_q^{a_p^q} (\alpha_1 a_p^1 + \ldots + \alpha_q a_p^q)(e^{\alpha_1 a_p^1 + \ldots + \alpha_q a_p^q} - 1) = 0$$

or $x(e^x - 1)$ est positif ou nul pour tout x, la nullité n'ayant lieu que pour $x = 0$. Par ailleurs les coefficients $\lambda_i \xi_1^{a_i^1} \ldots \xi_q^{a_i^q}$, $i = 1, 2, \ldots, p$ sont strictement positifs. La somme ci-dessus ne peut donc être nulle que si chacun de ses termes est nul, d'où :

$$\begin{cases} \alpha_1 a_1^1 + \ldots + \alpha_q a_1^q = 0 \\ \\ \alpha_1 a_p^1 + \ldots + \alpha_q a_p^q = 0 \ . \end{cases}$$

Les vecteurs $A_1, \ldots, A_q$ sont linéairement indépendants donc $\alpha_1 = \ldots = \alpha_q = 0$. D'où $\xi_i = \xi_i'$, $i = 1, 2, \ldots, p$, et l'unicité est démontrée.

4 - Démonstration de l'existence

On procède par récurrence sur la dimension q de $\mathcal{T}$. Dans le cas $q = 1$ le théorème 2 prend la forme particulière suivante

Proposition 4

Supposons que l'hyperplan H d'équation

$$H \equiv a_1 x_1 + \ldots + a_p x_p - c = 0$$

rencontre l'intérieur de $\mathbb{R}_+^p$ et soit $\mathcal{T}$ la courbe d'équations paramètriques en fonction du paramètre ξ positif :

$$x_1 = \lambda_1 \xi^{a_1}, \ \ldots, \ x_p = \lambda_p \xi^{a_p}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des nombres strictement positifs.

Alors H et $\mathcal{C}$ se coupent en un point qui appartient à l'intérieur de $\mathbb{R}_+^p$, puisque $\mathcal{C}$ y est toute entière et qui est unique. Les coordonnées de ce point sont des fonctions continues et indéfiniment dérivables des paramètres $c, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

L'unicité de la solution est acquise d'après le paragraphe précédent et la régularité de cette solution par rapport aux paramètres $c, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sera démontrée dans le paragraphe 5 suivant.

Pour l'existence il suffit de démontrer que l'équation

$$H(\xi) \equiv a_1 \lambda_1 \xi^{a_1} + \ldots + a_p \lambda_p \xi^{a_p} - c = 0$$

possède au moins une racine en ξ positive. La fonction $H(\xi)$ étant continue sur $]0, \infty[$ il suffit de démontrer que $\lim_{\xi \to 0^+} H(\xi)$ et $\lim_{\xi \to +\infty} H(\xi)$ sont de signes contraires.

Si tous les a_j sont positifs ou nuls alors c est strictement positif d'après la proposition 1 et l'hypothèse formulée dans la proposition 4. Pour $a_j = 0$, $\lambda_j a_j \xi^{a_j} = 0$ et pour $a_j > 0$, $\lambda_j a_j \xi^{a_j}$ tend vers 0 quand ξ tend vers 0, et tend vers $+\infty$ quand ξ tend vers $+\infty$. Donc :

$$\lim_{\xi \to 0^+} H(\xi) = -c < 0 \quad , \qquad \lim_{\xi \to +\infty} H(\xi) = +\infty \quad .$$

Si les a_j ne sont pas tous de même signe, il existe des coefficients a_j positifs et d'autres négatifs. Pour $a_j = 0$, $\lambda_j a_j \xi^{a_j}$ est nul; pour $a_j > 0$, $\lambda_j a_j \xi^{a_j}$ tend vers 0 quand ξ tend vers 0 et tend vers $+\infty$ quand ξ tend vers $+\infty$; pour $a_j < 0$, $\lambda_j a_j \xi^{a_j}$ tend vers $-\infty$ quand ξ tend vers 0 et tend vers 0 quand ξ tend vers $+\infty$. Donc :

$$\lim_{\xi \to 0^+} H(\xi) = -\infty \qquad \lim_{\xi \to +\infty} H(\xi) = +\infty \quad .$$

La proposition est par suite démontrée.

Supposons le théorème 2 ou 3 établi jusqu'à la dimension q. Il s'agit de démontrer que le système Γ :

$$H_1(\xi_1, \ldots, \xi_q) \equiv a_1^1 \lambda_1 \xi_1^{a_1^1} \ldots \xi_q^{a_1^q} + \ldots + a_p^1 \lambda_p \xi_1^{a_p^1} \ldots \xi_q^{a_p^q} - c_1 = 0$$

$$\Gamma' \begin{cases} H_2(\xi_1, \ldots, \xi_q) \equiv a_1^2 \lambda_1 \xi_1^{a_1^1} \ldots \xi_q^{a_1^q} + \ldots + a_p^2 \lambda_p \xi_1^{a_p^1} \ldots \xi_q^{a_p^q} - c_2 = 0 \\ - - - - - - \\ H_q(\xi_1, \ldots, \xi_q) \equiv a_1^q \lambda_1 \xi_1^{a_1^1} \ldots \xi_q^{a_1^q} + \ldots + a_p^q \lambda_p \xi_1^{a_p^1} \ldots \xi_q^{a_p^q} - c_q = 0 \end{cases}$$

possède au moins une solution.

Supposons $\xi_1 \in]0, \infty[$ fixé arbitrairement et considérons le système Γ' constitué par les équations $H_2, \ldots, H_q$.
La variété linéaire $\Gamma' = H_2 \cap \ldots \cap H_q$ est une sur-variété de Γ de dimension $p - q + 1$, et qui rencontre $\mathbb{R}_+^p$ d'après la proposition 3. Considérons alors la variété $\mathcal{C}'(\xi_1)$ de dimension $q - 1$ dont les équations paramétriques en fonction de $\xi_2, \ldots, \xi_q$ s'écrivent :

$$x_1 = (\lambda_1 \xi_1^{a_1^1}) \xi_2^{a_1^2} \ldots \xi_q^{a_1^q}, \ \ldots, \ x_p = (\lambda_p \xi_1^{a_p^1}) \xi_2^{a_p^2} \ldots \xi_q^{a_p^q} .$$

Les coefficients $\lambda_1' \equiv \lambda_1 \xi_1^{a_1^1}, \ldots, \lambda_p' = \lambda_p \xi_1^{a_p^1}$ sont strictement positifs. D'après l'hypothèse de récurrence, Γ' et $\mathcal{C}'(\xi_1)$ ont un point commun et un seul dans l'intérieur de $\mathbb{R}_+^p$ et ceci pour toute valeur de ξ_1. Autrement dit le système Γ' pour ξ_1 fixé a une solution unique en $\xi_2, \ldots, \xi_q$. D'après l'hypothèse de récurrence cette solution est une fonction continue et indéfiniment dérivable de $\lambda_1', \ldots, \lambda_p'$ donc de ξ_1.

Lorsqu'on remplace dans $H_1(\xi_1, \ldots, \xi_q)$ $\xi_2, \ldots, \xi_q$ par les fonctions de ξ_1 définies précédemment, H_1 devient une fonction de ξ_1 seul, définie et continue pour $\xi_1 \in]0, \infty[$. Pour démontrer l'existence d'une solution du système Γ il reste à présent à démontrer pour l'équation $H_1(\xi_1) = 0$ l'existence d'une solution sur la demi-droite $\xi_1 > 0$. Il suffit pour cela de prouver que $\lim_{\xi_1 \to 0^+} H_1(\xi_1)$ et $\lim_{\xi_1 \to +\infty} H_1(\xi_1)$ sont de signes contraires.

Lorsque $\xi_1 \longrightarrow 0^+$ ou $\xi_1 \longrightarrow +\infty$ chacune des fonctions $\xi_2(\xi_1), \ldots, \xi_q(\xi_1)$ définies par le système Γ' est de l'ordre d'une puissance, positive, négative ou nulle, de ξ_1. Autrement dit pour $\xi_1 \longrightarrow 0^+$ ou $\xi_1 \longrightarrow +\infty$ on a

$$\xi_2 \sim K_2 \xi_1^{\alpha_2}, \ \ldots ; \ \xi_q \sim K_q \xi_1^{\alpha_q}$$

les facteurs $K_2, \ldots, K_q$ n'étant pas les mêmes pour les deux limites mais étant strictement positifs dans les deux cas.

On considère la fonction $S(\xi_1)$ suivante :

$$S(\xi_1) = H_1(\xi_1) + \alpha_2 H_2(\xi_1) + \ldots + \alpha_q H_q(\xi_1)$$

où $H_i(\xi_1)$, $i = 1, \ldots, q$ est la valeur de $H_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q)$ quand on remplace $\xi_2, \ldots, \xi_q$ par la solution de Γ'.

En fait $H_i(\xi_1) \equiv 0$ pour $i = 2, \ldots, q$ et $S(\xi_1)$ est identique à $H_1(\xi_1)$.

$$S(\xi_1) = \lambda_1(a_1^1 + \alpha_2 a_1^2 + \ldots + \alpha_q a_1^q)\, \xi_1^{a_1^1}\, \xi_2^{a_1^2} \ldots \xi_q^{a_1^q} + \ldots$$

$$\ldots + \lambda_p(a_p^1 + \alpha_2 a_p^2 + \ldots + \alpha_q a_p^q)\, \xi_1^{a_p^1}\, \xi_2^{a_p^2} \ldots \xi_q^{a_p^q}$$

$$- (c_1 + \alpha_2 c_2 + \ldots + \alpha_q c_q).$$

Comme la variété linéaire Γ rencontre l'intérieur de $\mathbb{R}_+^p$ on a : ou bien les combinaisons $(a_j^1 + \alpha_2 a_j^2 + \ldots + \alpha_q a_j^q)$ $j = 1, 2, \ldots, p$, (qui ne peuvent être toutes nulles) ne sont pas toutes de même signe, ou bien elles sont toutes de même signe auquel cas $c_1 + \alpha_2 c_2 + \ldots + \alpha_q c_q$ a ce signe strictement d'après le corollaire de la proposition 2.

<u>1er cas</u> $\xi_1 \longrightarrow 0^+$. Pour $a_j^1 + \alpha_2 a_j^2 + \ldots + \alpha_q a_j^q \neq 0$

$$\lambda_j(a_j^1 + \alpha_2 a_j^2 + \ldots + \alpha_q a_j^q)\, \xi_1^{a_j^1}\, \xi_2^{a_j^2} \ldots \xi_q^{a_j^q} \sim \lambda_j\, K_2^{a_j^2} \ldots K_q^{a_j^q} (a_j^1 + \alpha_2 a_j^2 + \ldots + \alpha_q a_j^q)\, \xi_1^{a_j^1 + \alpha_2 a_j^2 + \ldots + \alpha_q a_j^q}.$$

Ce terme tend donc vers 0 ou $-\infty$ suivant que $a_j^1 + \alpha_2 a_j^2 + \ldots + \alpha_q a_j^q$ est positif ou négatif.

Si les combinaisons $a_j^1 + \alpha_2 a_j^2 + \ldots + \alpha_q a_j^q$, $j = 1, 2, \ldots, p$ sont toutes positives ou nulles $S(\xi_1)$ tend vers $-(c_1 + \alpha_2 c_2 + \ldots + \alpha_q c_q) < 0$; si elles sont toutes négatives ou nulles $S(\xi_1)$ tend vers $-\infty$; et si les combinaisons ne sont pas toutes de même signe $S(\xi_1)$ tend vers $-\infty$.

<u>2ème cas</u> $\xi_1 \longrightarrow +\infty$. On raisonne de même. Si les combinaisons $a_j^1 + \alpha_2 a_j^2 + \ldots + \alpha_q a_j^q$, $j = 1, 2, \ldots, p$ sont toutes positives ou nulles $S(\xi_1)$ tend vers $+\infty$; si elles sont toutes négatives ou nulles $S(\xi_1)$ tend vers $-(c_1 + \alpha_2 c_2 + \ldots + \alpha_q c_q) > 0$; et si elles ne sont pas toutes de même signe $S(\xi_1)$ tend vers $+\infty$.

Donc $\lim_{\xi_1 \to 0^+} H_1(\xi_1) < 0$ et $\lim_{\xi_1 \to +\infty} H_1(\xi_1) > 0$. La démonstration est achevée.

5 - Régularité de la solution du système Γ par rapport aux paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, c_1, \ldots, c_q$.

Considérons le système (3) et notons par $H_1, \ldots, H_q$ les premiers membres des équations.

Proposition 5. En tout point $\xi_1, \ldots, \xi_q$ ($\xi_j > 0$ pour $j = 1, \ldots, q$) on a

$$\frac{D(H_1, \ldots, H_q)}{D(\xi_1, \ldots, \xi_q)} \neq 0$$

On a $$\frac{\partial H_i}{\partial \xi_j} = a_1^i a_1^j \lambda_1 \frac{\xi_1^{a_1^1} \ldots \xi_q^{a_1^q}}{\xi_j} + \ldots + a_p^i a_p^j \lambda_p \frac{\xi_1^{a_p^1} \ldots \xi_q^{a_p^q}}{\xi_j}$$

$$\xi_j \frac{\partial H_i}{\partial \xi_j} = a_1^i a_1^j \lambda_1 \xi_1^{a_1^1} \ldots \xi_q^{a_1^1} + \ldots + a_p^i a_p^j \lambda_p \xi_1^{a_p^1} \ldots \xi_q^{a_p^q}$$

or :

$$\xi_1 \ldots \xi_q \frac{D(H_1, \ldots, H_q)}{D(\xi_1, \ldots, \xi_q)} = \xi_1 \ldots \xi_q \text{ dét}\left(\frac{\partial H_i}{\partial \xi_j}\right) = \text{dét}\left(\xi_j \frac{\partial H_i}{\partial \xi_j}\right).$$

Comme les ξ_j sont strictement positifs il est équivalent de démontrer que ce dernier déterminant est non nul.

Or la matrice $\left\| \xi_j \frac{\partial H_i}{\partial \xi_j} \right\|$ est symétrique et la forme quadratique associée s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{q} \xi_j \frac{\partial H_i}{\partial \xi_j} u_i u_j$$

$$= \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{q} \left\{ \lambda_1 \xi_1^{a_1^1} \ldots \xi_q^{a_1^q} a_1^i a_1^j u_i u_j + \ldots + \lambda_p \xi_1^{a_p^1} \ldots \xi_q^{a_p^q} a_p^i a_p^j u_i u_j \right\}$$

Mais $$\sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{q} a_1^i a_1^j u_i u_j = \left(\sum_{i=1}^{q} a_1^i u_i \right)^2 \geqslant 0 .$$

Les p quantités $\sum_{i=1}^{q} a_1^i u_i, \ldots, \sum_{i=1}^{q} a_p^i u_i$ ne peuvent être toutes nulles que pour $u_1 = \ldots = u_p = 0$ car les vecteurs $A_1, \ldots, A_q$ sont linéairement indépendants.

Comme par ailleurs on a $\lambda_j > 0$, $j = 1, \ldots, p$, et $\xi_i > 0$, $i = 1, \ldots, q$, il en résulte que la matrice $\left\| \xi_j \frac{\partial H_i}{\partial \xi_j} \right\|$ est symétrique définie positive. Donc dét $\left(\xi_j \frac{\partial H_i}{\partial \xi_j}\right) \neq 0$.

Conséquence. Il résulte des théorèmes sur les fonctions implicites [12] que la solution $\xi_1, \ldots, \xi_q$ du système (3) est une fonction continue et indéfiniment dérivable des paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ et $c_1, \ldots, c_q$.

APPENDICE III

Sur la résolution du système d'équations

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_q, \xi) = F_i(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_q^\circ, \xi) \qquad i = 1, 2, \ldots, q$$

$x_1, x_2, \ldots, x_q$ sont les inconnues, ξ est un paramètre.

Toutes les fonctions considérées sont des fonctions de variables réelles à valeurs réelles.

Théorème 1.

Soit un système de q équations dépendant de n paramètres $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ où les inconnues sont $X = (x_1, \ldots, x_q)$:

$$(1) \qquad f_i(X, Z) = 0 \qquad i = 1, \ldots, q$$

tel que $f_i(0, Z) = 0$. Ces fonctions sont indéfiniment dérivables au voisinage du point $(0, Z_0)$. Soient les jacobiens :

$$\mathcal{J} = \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_q)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_q)} \quad , \quad \mathcal{J}_1 = \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_{q-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{q-1})}$$

On note par Δ_i^j le cofacteur de f_{i,x_j} dans le déterminant $\mathcal{J}$. Si

$\mathcal{J}(0, Z_0) = 0$

$\mathcal{J}(0, Z) \neq 0$ pour tout Z voisin de Z_0 et $Z \neq Z_0$

$\mathcal{J}_1(0, Z_0) \neq 0$

$\Delta_q^k \Delta_q^l \Delta_i^q f_{i,x_k x_l} \neq 0$ au point $X = 0$, $Z = Z_0$ (on utilise la convention de l'indice muet).

Alors il existe une et une seule solution de (1) non identiquement nulle, fonction de Z, s'annulant pour $Z = Z_0$ et indéfiniment dérivable par rapport à Z dans un voisinage de Z_0 : $x_i = X_i(Z)$, $X_i(Z_0) = 0$.

Les $q-1$ premières équations pour les $q-1$ inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_{q-1}$ dépendent de $n+1$ paramètres (x_q, Z). Comme $f_i(0, Z_0) = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, q-1$ et comme $\mathcal{J}_1(0, Z_0) \neq 0$ l'application des théorèmes sur les fonctions implicites [12] permet d'affirmer que ce système de $q-1$ équations admet une solution et une seule définie et indéfiniment dérivable dans un voisinage de $x_q = 0$ et $Z = Z_0$. Cette solution

$$x_j = h_j(x_q, Z) \qquad j = 1, 2, \ldots, q-1 \tag{2}$$

est telle que $0 = h_j(0, Z_0)$.

$h_j(0, Z)$ est nulle pour tout Z voisin de Z_0. En effet par définition des $h_j(x_q, Z)$ on a $f_j(h_1(0, Z), h_2(0, Z), \ldots, h_{q-1}(0, Z), 0, Z) = 0$ pour $j = 1, 2, \ldots, q-1$. Mais on a aussi par hypothèse $f_j(0, Z) = 0$ pour $j = 1, 2, \ldots, q-1$. La solution des $q-1$ équations envisagées ci-dessus est unique donc $h_j(0, Z) = 0$ pour $j = 1, 2, \ldots, q-1$.

Portons les expressions (2) dans la $q^{\text{ième}}$ équation du système (1) :

$$f_q(h_1(x_q, Z), \ldots, h_{q-1}(x_q, Z), x_q, Z) = 0 . \tag{3}$$

Cette équation admet $x_q = 0$ comme solution puisque $h_j(0, Z) = 0$ pour $j = 1, 2, \ldots, q-1$ et $f_q(0, Z) = 0$. Mais la solution de (3) qui nous intéresse est la solution $x_q \neq 0$ voisine de 0 dont nous allons démontrer l'existence.

Appelons $F(x_q, Z)$ le premier membre de (3). $F(x_q, Z)$ est indéfiniment dérivable par rapport à x_q et à Z dans un voisinage de $x_q = 0$, $Z = Z_0$. Calculons $F_{,x_q}$ et $F_{,x_q x_q}$. La convention de l'indice muet est employée uniquement lorsque les indices varient de 1 à q

$$F_{,x_q} = \sum_{k=1}^{q-1} f_{q,x_q} \frac{\partial h_k}{\partial x_q} + f_{q,x_q} .$$

Les $\dfrac{\partial h_k}{\partial x_q}$ se calculent en dérivant par rapport à x_q les $q-1$ premières équations du système (1) lorsqu'on y remplace x_j par $h_j(x_q, Z)$ pour $j = 1, 2, \ldots, q-1$:

$$\sum_{k=1}^{q-1} f_{i,x_k} \frac{\partial h_k}{\partial x_q} + f_{i,x_q} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, q-1.$$

d'où

$$\frac{\partial h_k}{\partial x_q} = \Delta_q^k \, (\Delta_q^q)^{-1} \tag{4}$$

(5) Donc

$$F_{,x_q} = \mathcal{J}\ \mathcal{J}_1^{-1}$$

Pour des raisons de continuité $\mathcal{J}_1$ est non nul dans un voisinage de $x_q = 0$, $Z = Z_0$. De même :

$$F_{,x_q x_q} = \sum_{k=1}^{q-1} \sum_{l=1}^{q-1} f_{q,x_k x_l} \frac{\partial h_k}{\partial x_q} \frac{\partial h_l}{\partial x_q} + \sum_{k=1}^{q-1} f_{q,x_k} \frac{\partial^2 h_k}{\partial x_q^2} + 2 \sum_{k=1}^{q-1} f_{q,x_k x_q} \frac{\partial h_k}{\partial x_q} + f_{q,x_q x_q}$$

on utilise (4)

$$(6) \qquad F_{,x_q x_q} = (\Delta_q^q\ \Delta_q^q)^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{q-1} f_{q,x_k} \frac{\partial^2 h_k}{\partial x_q^2} \Delta_q^q\ \Delta_q^q + \Delta_q^k\ \Delta_q^l\ f_{q,x_k x_l} \right\} .$$

Pour avoir les $\frac{\partial^2 h_k}{\partial x_q^2}$ on dérive deux fois les $q-1$ premières équations de (1) :

$$\sum_{k=1}^{q-1} f_{i,x_k} \frac{\partial^2 h_k}{\partial x_q^2} + \sum_{k=1}^{q-1} \sum_{l=1}^{q-1} f_{i,x_k x_l} \frac{\partial h_k}{\partial x_q} \frac{\partial h_l}{\partial x_q} + 2 \sum_{k=1}^{q-1} f_{i,x_k x_q} \frac{\partial h_k}{\partial x_q} + f_{i,x_q x_q} = 0$$

d'où

$$(7) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{q-1} f_{i,x_k} \frac{\partial^2 h_k}{\partial x_q^2}\ \Delta_q^q\ \Delta_q^q + \Delta_q^k\ \Delta_q^l\ f_{i,x_k x_l} = 0 \\ \\ i = 1, 2, \ldots, q-1 \end{cases}$$

Les $q-1$ équations (7) donnent les $\frac{\partial^2 h_k}{\partial x_q^2}$, $k = 1, 2, \ldots, q-1$. En portant ces valeurs dans (6) on trouve $F_{,x_q x_q}$. Mais on peut dire aussi que (6) et (7) constituent un système de q équations pour les $q-1$ inconnues $\frac{\partial^2 h_k}{\partial x_q^2}$; $F_{,x_q x_q}$ est alors donné par la condition de compatibilité suivante :

$$\begin{vmatrix} f_{1,x_1} & f_{1,x_2} & \cdots & \Delta_q^k\ \Delta_q^l\ f_{1,x_k x_l} \\ - - - - - - - - - - - - - - - \\ f_{q-1,x_1} & f_{q-1,x_2} & \cdots & \Delta_q^k\ \Delta_q^l\ f_{q-1,x_k x_l} \\ f_{q,x_1} & f_{q,x_2} & \cdots & \Delta_q^k\ \Delta_q^l\ f_{q,x_k x_l} - \Delta_q^q\ \Delta_q^q\ F_{,x_q x_q} \end{vmatrix} = 0 .$$

En développant par rapport à la dernière colonne il vient :

$$(8) \qquad F_{,x_q x_q} = (\Delta_q^q)^{-3}\ \Delta_i^q\ \Delta_q^k\ \Delta_q^l\ f_{i,x_k x_l}$$

Revenons à la résolution de l'équation (3). Pour $x_q = 0$ et $Z = Z_0$ on a $h_j(0, Z_0) = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, q-1$ et d'après les hypothèses :

$$F(0, Z_0) = 0 \ , \qquad F_{,x_q}(0, Z_0) = 0 \ , \qquad F_{,x_q x_q}(0, Z_0) \neq 0 \ .$$

Nous avons utilisé les formules (5) et (8). $x_q = 0$ est une solution "double" mais non "triple" de $F(x_q, Z_0) = 0$. On peut écrire :

$$(9) \qquad F(x_q, Z_0) = \frac{1}{2} x_q^2 \left\{ F_{,x_q x_q}(0, Z_0) + \frac{x_q}{3} F_{,x_q x_q x_q}(\theta x_q, Z_0) \right\}, \quad \theta \in]0, 1[\ .$$

Soit la fonction $G(x_q, Z)$ définie par $G(0, Z) = F_{,x_q}(0, Z)$ et $G(x_q, Z) = \dfrac{F(x_q, Z)}{x_q}$ pour $x_q \neq 0$. $G(x_q, Z)$ est définie et indéfiniment dérivable dans un voisinage de $x_q = 0$, $Z = Z_0$. On a $G(0, Z_0) = 0$ et $G_{,x_q}(0, Z_0) \neq 0$ d'après (9); l'équation $G(x_q, Z) = 0$ admet une solution et une seule définie et indéfiniment dérivable dans un voisinage de $Z = Z_0$. Cette solution $x_q = X_q(Z)$ est telle que $0 = X_q(Z_0)$.

En portant $x_q = X_q(Z)$ dans les expressions (2) on obtient une solution du système (1) :

$$(10) \qquad \begin{cases} x_j = X_j(Z) \qquad 0 = X_j(Z_0) \\ \\ j = 1, 2, \ldots, q \end{cases}$$

Cette solution (10) n'est pas identiquement nulle au voisinage de $Z = Z_0$. En effet supposons $x_q = X_q(Z) = 0$ pour tout Z, alors $G(X_q(Z), Z) = 0 = G(0, Z)$ pour tout Z. Mais $G(0, Z) = F_{,x_q}(0, Z)$ est non nul pour Z voisin de Z_0 et $Z \neq Z_0$ d'après (5) et les hypothèses.

Théorème 2

Soit pour les inconnues $X = (x_1, \ldots, x_q)$ un système de q équations dépendant de $q+1$ paramètres $Z = (z_1, \ldots, z_q)$ et ξ de la forme

$$(11) \qquad F_i(x_1, \ldots, x_q, \xi) = F_i(z_1, \ldots, z_q, \xi) \qquad i = 1, 2, \ldots, q \ .$$

On suppose les fonctions F_i indéfiniment dérivables dans un voisinage de $X^0 = (x_1^0, \ldots, x_q^0)$ et de ξ^0; on introduit les jacobiens

$$\mathcal{J} = \frac{D(F_1, \ldots, F_q)}{D(x_1, \ldots, x_q)} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{J}_1 = \frac{D(F_1, \ldots, F_{q-1})}{D(x_1, \ldots, x_{q-1})}$$

Δ_i^j note le cofacteur de F_{i,x_j} dans le déterminant $\mathcal{J}$. On suppose :

$$\mathcal{J}_1(X^o, \xi_o) \neq 0, \qquad \mathcal{J}(X^o, \xi_o) = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \xi}(X^o, \xi_o) \neq 0$$

et $\Delta_q^\kappa \Delta_q^l \Delta_i^q F_{i,x_k x_l} \neq 0$ au point $X = X^o$ et $\xi = \xi_o$ (en utilisant la convention de l'indice muet). Alors pour ξ voisin de ξ_o et Z voisin de X^o il existe une solution et une seule X de (11) non identique à Z, fonction de Z et de ξ, égale à X^o pour $\xi = \xi_o$ et $Z = X^o$, indéfiniment dérivable par rapport aux variables Z et ξ. Cette solution s'écrit $x_i = X_i(z_1, \ldots, z_q, \xi)$, $i = 1, 2, \ldots, q$. On appelle K le jacobien des q fonctions X_i par rapport aux q variables z_i. Alors :

$$\lim_{\xi \to \xi_o} K(X^o, \xi) = -1 .$$

Remarque. On voit que comme conséquence directe du théorème 2 pour ξ voisin de ξ_o, il existe une solution et une seule X de $F_i(x_1, \ldots, x_q, \xi) = F_i(x_1^o, \ldots, x_q^o, \xi)$, non identique à X^o, fonction de ξ, égale à X^o pour $\xi = \xi_o$ et indéfiniment dérivable par rapport à ξ.

Démonstration

On pose $x_i = y_i + z_i$, $Y = (y_1, \ldots, y_q)$ et $f_i(y_1, \ldots, y_q, Z, \xi) = F_i(y_1 + z_1, \ldots, y_q + z_q, \xi) - F_i(z_1, \ldots, z_q, \xi)$. Au voisinage du point $(Z, \xi) = (X^o, \xi_o)$ le théorème 1 s'applique au système des q équations $f_i(y_1, \ldots, y_q, Z, \xi) = 0$. Pour ce système il existe donc une solution et une seule non identiquement nulle, indéfiniment dérivable par rapport à Z et ξ au voisinage de (X^o, ξ_o); cette solution $y_i = Y_i(z_1, \ldots, z_q, \xi)$ est telle que $0 = Y_i(x_1^o, \ldots, x_q^o, \xi_o)$. L'existence et l'unicité de la solution du système (11) comme décrite dans le théorème 2 en résultent en faisant le changement de notation.

Remplaçons dans (11) x_i par la solution trouvée ci-dessus $X_i(z_1, \ldots, z_q, \xi)$ pour $i = 1, 2, \ldots, q$, et différencions les relations obtenues par rapport à z_j :

$$F_{i,x_k}(X, \xi) \frac{\partial X_k(Z, \xi)}{\partial z_j} - F_{i,x_j}(Z, \xi) = 0$$

Faisons $Z = X^o$

$$F_{i,x_k}(X, \xi) \frac{\partial X_k(X^o, \xi)}{\partial z_j} - F_{i,x_j}(X^o, \xi) = 0$$

où X est mis pour $X_1(X^o, \xi), \ldots, X_q(X^o, \xi)$. Au premier membre on reconnaît le produit de deux matrices d'où :

$$\frac{1}{K(X^o,\xi)} = \frac{\det |F_{i,x_j}(X, \xi)|}{\det |F_{i,x_j}(X^o,\xi)|}$$

On doit chercher la limite de K quand ξ tend vers ξ_o, et dans ce but on va faire un développement limité au voisinage de ξ_o.

On pose : $\xi - \xi_o = \epsilon$

$$\alpha_j = \left[\frac{\partial X_j(X^o,\xi)}{\partial \xi}\right]_{\xi = \xi_o}$$

$$\alpha = \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \det |F_{i,x_k}(X^o,\xi)|\right]_{\xi = \xi_o}, \quad \alpha \text{ est non nul par hypothèse}$$

D'où :

$$X_j(X^o,\xi) = x_j^o + \alpha_j \epsilon + O(\epsilon^2)$$

$$\det |F_{i,x_k}(X^o,\xi)| = 0 + \alpha \epsilon + O(\epsilon^2)$$

$$\det |F_{i,x_k}(X, \xi)| = 0 + \left\{\alpha + \alpha_j \left[\frac{\partial}{\partial X_j} \det |F_{i,x_k}(X, \xi)|\right]_{\substack{X = X^o \\ \xi = \xi^o}}\right\} + O(\epsilon^2).$$

On utilise systèmatiquement la convention de l'indice muet. Mais

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \det |F_{i,x_k}(X,\xi)| = F_{i,x_k x_j}(X,\xi).\Delta_i^k(X,\xi)$$

$$\frac{1}{K(X^o,\xi)} = 1 + \frac{\alpha_j}{\alpha} F_{i,x_k x_j}(X^o,\xi_o) \cdot \Delta_i^k(X^o,\xi_o) + O(\epsilon). \tag{12}$$

Calcul des α_j en fonction de α.

On considère les q équations (11) définissant $X_j(X^o,\xi)$ $j = 1, 2, \ldots, q$:

$$F_i(X, \xi) - F_i(X^o, \xi) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, q \tag{13}$$

Au voisinage de $\xi = \xi_o$ écrivons les développements limités à l'ordre 2 pour chacune de ces équations. Lorsque les arguments dans une fonction sont X^o, ξ_o, ceux-ci sont omis.

$$F_i(X^o,\xi) = F_i + (\xi - \xi_o)\frac{\partial F_i}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\epsilon^2 \frac{\partial^2 F_i}{\partial \xi^2} + 0(\epsilon^3)$$

$$F_i(X,\xi) = F_i + [X_j(X^o,\xi) - x_j^o]F_{i,x_j} + (\xi - \xi_o)\frac{\partial F_i}{\partial \xi}$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{[X_j(X^o,\xi) - x_j^o][X_l(X^o,\xi) - x_l^o]F_{i,x_j x_l} + 2[X_j(X^o,\xi) - x_j^o](\xi - \xi_o)\frac{\partial F_{i,x_j}}{\partial \xi}\right.$$
$$\left. + (\xi - \xi_o)^2 \frac{\partial^2 F_i}{\partial \xi^2}\right\} + 0(\epsilon^3).$$

On pose $\beta_j = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 X_j}{\partial \xi^2}$ si bien que $X_j(X^o,\varepsilon) = x_j^o + \alpha_j\epsilon + \beta_j\epsilon^2 + 0(\epsilon^3)$ car $\xi - \xi_o = \epsilon$. Les q équations (13) donnent :

$$\left\{ (\alpha_j F_{i,x_j})\epsilon + \left\{\beta_j F_{i,x_j} + \alpha_j \frac{\partial F_{i,x_j}}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\alpha_j \alpha_l F_{i,x_j x_l}\right\}\epsilon^2 + 0(\epsilon^3) = 0 \right.$$
$$\left. i = 1, 2, \ldots, q \right.$$

On déduit :

(14) $\alpha_j F_{i,x_j} = 0$ $\qquad i = 1, 2, \ldots, q.$

(15) $\beta_j F_{i,x_j} = -\alpha_j \frac{\partial F_{i,x_j}}{\partial \xi} - \frac{1}{2}\alpha_j \alpha_l F_{i,x_j x_l}$ $\qquad i = 1, 2, \ldots, q.$

Le système (14) qui est un système linéaire de q équations pour les q inconnues α_j ne détermine pas de manière unique les α_j car dét $|F_{i,x_j}| = 0$ par hypothèse. Ce système (14) est de rang $q - 1$ car $\mathcal{J}_1 = \Delta_q^q \neq 0$ par hypothèse. Le système (15) est un système linéaire de q équations pour les q inconnues β_j de rang $q - 1$; il n'a de solution que si une certaine condition de compatibilité est satisfaite.

Les équations (14) auxquelles on adjoint cette condition de compatibilité permettent de calculer les α_j. La condition de compatibilité pour (15) s'écrit, car $\Delta_q^q \neq 0$:

$$\begin{vmatrix} F_{1,x_1} & \cdots & F_{1,x_{q-1}} & -\alpha_j \frac{\partial F_{1,x_j}}{\partial \xi} - \frac{1}{2}\alpha_j \alpha_l F_{1,x_j x_l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{q-1,x_1} & \cdots & F_{q-1,x_{q-1}} & -\alpha_j \frac{\partial F_{q-1,x_j}}{\partial \xi} - \frac{1}{2}\alpha_j \alpha_l F_{q-1,x_j x_l} \\ F_{q,x_1} & \cdots & F_{q,x_{q-1}} & -\alpha_j \frac{\partial F_{q,x_j}}{\partial \xi} - \frac{1}{2}\alpha_j \alpha_l F_{q,x_j x_l} \end{vmatrix} = 0$$

BIBLIOGRAPHIE

1 - BIRD, G.A. Shock-Wave Structure in a Rigid Sphere Gas. Rarefied Gas Dynamics edited by J.H. de Leeuw. Vol I, Academic Press, New York, 1965.

2 - BROADWELL, J.E. Shock Structure in a simple discrete velocity gas. The Physics of Fluids, 7, 1964, n° 8, p. 1243.

3.- BROADWELL, J.E. Study of rarefied shear flow by the discrete velocity method. Journal of Fluid Mechanics, 19, 1964, n° 3, p. 401.

4 - CABANNES, H. Théorie des ondes de choc. Handbuch der Physik edited by S. Flügge, Band IX, Springer Verlag, 1960.

5 - CABANNES, H. Magnetodynamique des Fluides. C.D.U. Paris, 1969.

6 - CARLEMAN, T. Problèmes mathématiques dans la théorie cinétique des gaz. Uppsala, 1957 (Publications Scientifiques de l'Institut Mittag-Leffler).

7 - CERCIGNANI, C. Mathematical Methods in Kinetic Theory. Plenum Press, New York, 1969.

8 - CHAHINE, M.T. and NARASIMHA, R. Exact Numerical Solution of the complete B G K Equation for Strong Shock Waves. Rarefied Gas Dynamics edited by J.H. de Leeuw. Vol I, Academic Press, New York, 1965.

9 - CHAPMAN, S. and COWLING, T.G. The Mathematical Theory of Non-uniform Gases. University Press, Cambridge, 1960.

10 - COURANT, R. and HILBERT, D. Methods of Mathematical Physics, Vol II, J. Wiley and Sons, New York, 1962.

11 - DELCROIX, J.L. Physique des Plasmas, I. Dunod, Paris, 1963.

12 - DIEUDONNE, J. Eléments d'Analyse. Vol 1, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

13 - GATIGNOL, R. Etude de la structure d'une onde de choc pour un gaz à répartition discrète de vitesses. C.R. Acad. Sci. Paris, 261, 1965, p. 2841.

14 - GATIGNOL, R. Etude d'un gaz à répartition discrète de vitesses. C.R. Acad. Sci. Paris, 263, série A, 1966, p. 332.

15 - GATIGNOL, R. Théorème H pour un gaz modérément dense à répartition discrète de vitesses. C.R. Acad. Sci. Paris, 268, série A, 1969, p. 513.

16 - GATIGNOL, R. Méthode de Chapman-Enskog appliquée à un modèle de gaz à répartition discrète de vitesses. C.R. Acad. Sci. Paris, 268, série A, 1969, p. 570.

17 - GATIGNOL, R. Théorie cinétique d'un gaz à répartition discrète de vitesses. Zeitschrift für Flugwissenschaften, 18, 1970, Heft 2/3, p.93.

18 - GATIGNOL, R. Sur le système des équations d'Euler des gaz à répartition discrète de vitesses. C.R. Acad. Sci. Paris, 274, Série A, 1972, p. 1429.

19 - GATIGNOL, R. Les ondes de choc dans les gaz à répartition discrète de vitesses. C.R. Acad. Sci. Paris, 274, Série A, 1972, p. 1473.

20 - GERMAIN, P. Théorie Générale des Milieux Continus. Cours 1963-1964. Institut Henri-Poincaré, Paris.

21 - GODUNOV, S.K. et SULTANGAZIN, U.M. Sur des modèles discrets de l'équation de Boltzmann (en russe), Uspehi Mathematic Nauk, 26, 1971, n° 3, p. 3.
On discrete models of the kinetic Boltzmann equation, Russian Mathematical surveys, 26, 1971, n° 3, p. 1.

22 - GRAD, H. Asymptotic Theory of the Boltzmann Equation. Physics of Fluids, 6, n° 2, 1963, p. 147.

23 - GRAD, H. Principles of the Kinetic Theory of Gases. Handbuch der Physik edited by S. Flügge, Band XII, Springer-Verlag, Berlin, 1958.

24 - GROSS, E.P. Recent Investigations of the Boltzmann Equation. Rarefied Gas dynamics, edited by F.M. Devienne, Pergamon Press, New York, 1960.

25 - GUIRAUD, J.P. Kinetic Theory and Rarefied Gas Dynamics. Rarefied Gas Dynamics, edited by C.L. Brundin, Academic Press, New York, 1967.

26 - GUIRAUD, J.P. Gas Dynamics from the point of wiew of kinetic theory, Communication to XIII International Congress of Theoretical and Applied Mechanics Moscow, U.S.S.R., August 1972.

27 - HARDY, I et POMEAU, Y. Thermodynamics and Hydrodynamics for a modeled Fluid. Journal of Mathematical Physics, 13, 1972, n° 7, p. 1042.

28 - HARRIS, S. Approach to equilibrium in a moderately dense discrete velocity gas. The Physics of Fluids, 9, 1966, n° 7, p. 1328.

29 - HARRIS, S. Proof for a discrete velocity gas that successive derivatives for Boltzmann's H fonction alternate in sign. Journal of Mathematical Physics, 8, 1967, n° 12, p. 2407.

30 - HARRIS, S. Structure of the H Function for a Hard-Sphere Gas. The Journal of Chemical Physics, 48, 1968, n° 8, p. 3723.

31 - HEITLER, W. Le Principe du Bilan détaillé. Annales de l'Institut Henri Poincaré Paris, 15, 1956, p.67.

32 - HOLWAY, L.H. Kinetic theory of Shock Structure using an Ellipsoïdal Distribution function. Rarefied Gas Dynamics edited by J.H. de Leeuw. Vol I, Academic Press, New York, 1965.

33 - JANCEL, R. Les fondements de la Mécanique Statistique classique et quantique. Gauthier-Villars, Paris, 1963.

34 - JANCEL, R. et KAHAN, Th. Electrodynamique des Plasmas fondée sur la Mécanique Statistique, Tome I. Dunod, Paris, 1963.

35 - KAC, M. Probability and related topics in physical Sciences. American Mathematical Society, 1957.

36 - KOGAN, M.N. Rarefied Gas Dynamics. Plenum Press, New York, 1969.

37 - KROOK, M. Astrophysical Journal, 122, 1955, p. 488

38 - LAX, P.D. Hyperbolic systems of conservation laws II. Communications on Pure and Applied Mathematics, 10, 1957, p. 537.

39 - MAXWELL, J.C. Scientific Papers II, Cambridge University Press, Cambridge, 1890.

40 - SCHULTZ - GRUNOW, F and FROHN, A. Density Distribution in Shock Waves Traveling in a Rarefied Monoatomic Gases. Rarefied Gas Dynamics edited by J.H. de Leeuw, Vol I, Academic Press, New York, 1965.

41 - SENGERS, J.V. Triple Collision Contribution to the Transport Coefficients of a Rigid sphere Gas. The Physics of Fluids, 9, 1966, n° 7, p. 1333.

42 - SMOLDEREN, J. Structure des chocs et théorie cinétique des gas. Chocs et Ondes de choc, Tome I, sous la direction de A.L. Jaumotte. Masson et Cie, Paris, 1971.

43 - WHITHAM, G.B. Some Comments on Wave Propagation and Shock Wave Structure with application to magnetohydrodynamics. Communications on Pure and Applied Mathematics, 12, 1959, p. 113.